Ringe mit Selbstdualität

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der

Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Horst Beckmann

aus Düsseldorf

Düsseldorf

1984

Ringe mit Selbstdualität

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der

Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Horst Beckmann

aus Düsseldorf

Düsseldorf

1984

1. Berichterstatter Prof. Dr. O. Kerner
2. Berichterstatter Prof. Dr. A. Bergmann
Tag der mündlichen Prüfung: 1. Juni 1984

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen 5

Kapitel 0: Einleitung 9

Kapitel 1: Unter- und Faktorringe von Ringen mit Moritadualität 19

Kapitel 2: Verallgemeinerte Matrizenringe 48

Kapitel 3: Einreihige Ringe 67

Kapitel 4: Linkseinreihige Ringe 87

Kapitel 5: Gruppenringe 122

Literaturverzeichnis 126

Zusammenfassung 129

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543905_0054

V o r b e m e r k u n g e n

Betrachtet man für einen Körper K den Funktor $Hom_K(-,K)$, so stellt dieser Funktor eine kontravariante Äquivalenz der Kategorie der endlich dimensionalen K- Vektorräume dar. Die Frage, der in dieser Arbeit nachgegangen werden wird, ist die, für welche Ringe eine analoge Äquivalenz zwischen der Kategorie der endlich erzeugten Linksmoduln und der Kategorie der endlich erzeugten Rechtsmoduln vorhanden ist.

In Kapitel 0 werden die wichtigsten Ergebnisse der Theorie der Morita- dualen Ringe noch einmal aufgeführt werden. Diese Ergebnisse stammen hauptsächlich von Morita ([26]) und Azumaya ([3]) und sind in der üblichen Literatur über Ringtheorie zu finden. Außerdem werden einige technische Hilfsmittel bereitgestellt werden. Am Ende dieses Kapitels werden noch einmal die bisher bekannten Klassen selbstdualer Ringe aufgeführt werden.

Bei diesen als selbstdual bekannten Ringen wird häufig folgende Beweismethode verwendet: Man sucht zu einem linksartinschen Ring R einen endlich erzeugten injektiven Kogenerator ${}_RU$. $End_R(U)$ ist dann zu R dualer Ring ([3]).

Mit dieser Methode wird in Kapitel 5 gezeigt werden, daß für einen Ring R, der zu einem Ring S dual ist, der Gruppenring RG zum Gruppenring SG dual ist, wenn G eine endliche Gruppe ist.

Eine andere Methode einen dualen Ring anzugeben, die auch von Azumaya ([3]) stammt, ist folgende: Zu einem linksartinschen Ring R und einem rechtsartinschen Ring S gibt man einen R- S- Bimodul U an, so daß U sowohl als R- Links-, als auch als S- Rechtsmodul injektiver Kogenerator ist. Ferner muß man nachweisen, daß $Hom_S(-,{}_RU_S)$ und $Hom_R(-,{}_RU_S)$ einfache Moduln in ebensolche überführen. Mit dieser Methode wird in Kapitel 2 die Selbstdualität für bestimmte verallgemeinerte Matrizenringe nachgewiesen werden.

Es handelt sich dabei um Matrizenringe R, bei denen

die Hauptdiagonalelemente eines jeden Elementes von R alle aus einem lokalen QF- Ring D stammen. An den anderen Stellen sollen Elemente aus speziellen D- D- Bimodulen stehen, für diese Bimoduln wird noch verlangt, daß sie als Bimodul direkte Summe von beidseits zu D isomorphen Untermoduln sind.

Die gleiche Beweismethode wird außerdem auch noch im ersten Kapitel verwendet werden. Dort wird man einen Ring R, der zu einem Ring R' vermöge eines R- R'- Bimodul U dual ist, betrachten. Für die Ringe R und R' wird gefordert werden, daß es jeweils eine vollständige Menge von paarweise orthogonalen Idempotente $f_1,\ldots, f_k$ von R und $f'_1,\ldots, f'_k$ von R', gibt, so daß die injektive Hülle von $Rf_i/Rad(Rf_i)$ zu Uf'_i isomorph ist. Mit Hilfe der Annulatoren von $f'_jR'f'_i$ und $f_iUf'_j$ wird man dann Aussagen über die Gestalt der dualen Ringe von Faktorringen von R und von Unterringen von R erhalten. Bei den letzteren wird noch verlangt werden, daß f_iRf_i für alle i im Unterring enthalten ist.

Speziell wird für einen Unterring S, für den gilt, daß für alle primitiven Idempotente e aus R eRe in S enthalten ist, der Begriff HDE- Unterring eingeführt werden. Dann wird im ersten Kapitel noch gezeigt werden, daß jeder HDE-Unterring, jeder Faktorring und jeder Morita- äquivalente Ring eines Ringes mit guter Dualität wieder gute Dualität hat. (Von einem (selbstdualen) Ring R wird gesagt, daß er eine gute Dualität hat, wenn für alle zweiseitigen Ideale I des Ringes gilt, daß $r_Rr_U(I) = I$ ist. Dabei ist U der die Selbstdualität von R vermittelnde injektive Kogenerator. Mit $r_R(-)$ bzw. $r_U(-)$ seien die Rechtsannulatoren von R bzw. U verstanden)

Die Ergebnisse von Kapitel 1 werden in Kapitel 3 benutzt werden, um zu zeigen, daß jeder einreihige Ring Faktorring eines HDE- Unterringes eines einreihigen QF- Ringes ist. Von einreihigen QF- Ringen hat J. K. Haack ([16]) die gute Dualität nachgewiesen.

In Kapitel 4 wird zuerst nachgewiesen werden, daß jeder linkseinreihige Ring R, für den gilt, daß eR für alle primitiven Idempotente e aus R distributiv ist und für den es einen einfachen projektiven Linksmodul gibt, Faktorring eines tic tac toe- Matrizenringes über einem Schiefkörper ist. Damit ist dieser Ring Faktorring eines HDE- Unterringes eines oberen Dreiecksmatrizenringes über einem Schiefkörper, also Faktorring eines HDE- Unterringes eines einreihigen Ringes. Dabei wird ein Ergebnis von K. R. Fuller und J. K. Haack wesentlich benutzt werden: Jeder Ring mit Köchern, die Bäume sind, ist Faktorring eines tic tac toe-Ringes ([15]).

Mit Hilfe dieses Ergebnisses wird dann im vierten Kapitel weiterhin gezeigt werden, daß jeder linkseinreihige Ring R, für den gilt, daß eR distributiv ist für alle primitiven Idempotente e aus R und für den es keinen einfachen projektiven Linksmodul gibt, Faktorring eines HDE- Unterringes eines einreihigen Ringes ist. Damit ist dann für alle linkseinreihigen Ringe, für die gilt, daß eR für alle primitiven Idempotente e in R distributiv ist, gezeigt worden, daß sie Faktorringe von HDE- Unterringen von einreihigen Ringen sind. Damit sind diese Ringe alle von guter Dualität.

K a p i t e l 0

E i n l e i t u n g

Bezeichnungen:

Es sei $\underline{\text{Mod}}_R$ die Kategorie der R- Rechtsmoduln, $\underline{\text{mod}}_R$ die Kategorie der endlich erzeugten R- Rechtsmoduln für einen Ring R. ${}_R\underline{\text{Mod}}$ und ${}_R\underline{\text{mod}}$ seien die entsprechenden Kategorien der Linksmoduln. Die Homomorphismen der Linksmoduln werden rechts, alle anderen Abbildungen links geschrieben.

Alle Ringe enthalten ein Einselement 1, alle Ringhomomorphismen respektieren es. Alle betrachteten Moduln sind unitär. Für einen Modul M sei E(M) dessen injektive Hülle.

Ist I Teilmenge eines Ringes R, N Teilmenge eines Moduls ${}_RM$, so sei der Annulator $\text{ann}_I(N) = \{ r \in I \mid rM = 0 \}$. Analog werden die anderen Annulatoren definiert. Es werden außer in diesem Kapitel für den Rechts- und den Linksannulator keine unterschiedlichen Bezeichnungen verwendet, da i. A. keine Verwechslung zu befürchten ist, bzw. gleiche Aussagen für beide gültig sind.

Wenn nicht ausdrücklich anderes verlangt wird, ist R artinscher Ring mit $e_1, \ldots, e_n$ einer vollständigen Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente. Bei einer vollständigen Menge von Idempotenten wird stets vorausgesetzt, daß sämtliche Idempotente von Null verschieden sind.

J sei stets das Radikal von R.

Für Unterringe gilt, daß sie das Einselement des Ausgangsringes enthalten, wenn dies nicht extra negiert wird.

Für einen R- Linksmodul M bezeichne lg(M) die Kompositionslänge des Moduls. Ist zwischen der Länge als Rechts- und als Linksmodul zu unterscheiden, so wird der Modul entsprechend indiziert.

Ist M R- Linksmodul, T Teilmenge von M, so bezeichne RT den von T erzeugten Untermodul von M. D. h., T enthält alle endlichen Summen der Form $r_i m_i$ mit $r_i \in R$, $m_i \in T$.

Beweise werden mit q.e.d. beendet. Wichtige Bezeichnungen und Definitionen werden unterstrichen.

Die Nummerierung der Verweise, Sätze, Lemmata etc. enthält als erstes die Kapitelnummer. Die Ergebnisse werden innerhalb eines Kapitels fortlaufend durchnummeriert.

Für einen Körper K ist bekannt, daß der kontravariante Funktor $\mathrm{Hom}_K(-,K)$ eine Äquivalenz von $_K\underline{mod}$ in $_K\underline{mod}$ darstellt (bzgl. der kategoriellen Definitionen s. z. B. 38; 39). Dies ist der bekannteste Fall einer Moritadualität.

Innerhalb dieser Arbeit sollen Ringe aufgezeigt werden, für die gilt, daß es analog eine kontravariante Äquivalenz zwischen $_R\underline{mod}$ und $\underline{mod}_R$ gibt. D. h., es sollen Ringe betrachtet werden, die zu sich selbst dual sind.

Für den allgemeinen Fall zweier Ringe R und S gibt es eine Reihe von "klassischen" Ergebnissen, die hauptsächlich von Morita ([26]) und Azumaya ([3]) stammen. Von diesen Ergebnissen seien die wichtigsten und die, die in dieser Arbeit benutzt werden, hier noch einmal aufgeführt.

Es werden bei der Moritadualität zwei Ringe R und S betrachtet, für die es zwei kontravariante Funktoren $D_1:\underline{M}_S \longrightarrow {}_R\underline{M}$ und $D_2:{}_R\underline{M} \longrightarrow \underline{M}_S$ gibt, so daß eine kontravariante Äquivalenz vorliegt, d. h. $D_2D_1 \cong 1_{\underline{M}_S}$ und $D_1D_2 \cong 1_{{}_R\underline{M}}$. Dabei seien $\underline{M}_S$ bzw. ${}_R\underline{M}$ Unterkategorien von $\underline{Mod}_S$, bzw. $_R\underline{Mod}$.

Ist ${}_RU_S$ ein R- S- Bimodul, so stellen $D_1 := \mathrm{Hom}_S(-,{}_RU_S)$ und $D_2 := \mathrm{Hom}_R(-,{}_RU_S)$ kontravariante Funktoren von $\underline{Mod}_S$ in $_R\underline{Mod}$ bzw. von $_R\underline{Mod}$ in $\underline{Mod}_S$ dar. Es gibt dann zwei natürliche Transformationen $\delta:1_{\underline{Mod}_S} \longrightarrow D_2D_1$ und $\delta:1_{{}_R\underline{Mod}} \longrightarrow D_1D_2$.

Da für diese beide natürlichen Transformationen die gleichen Aussagen gelten, besteht nicht die Notwendigkeit, sie mit verschiedenen Symbolen zu bezeichnen.

Die Objekte aus $\underline{Mod}_S$ oder aus $_R\underline{Mod}$, für die δ ein Isomorphismus ist, werden reflexiv (bzw. δ - reflexiv oder U- reflexiv genannt). Man kann zeigen, daß D_1 und D_2 kontravariante Äquivalenzen der Unterkategorien der reflexiven Moduln

darstellen und daß die Unterkategorien der reflexiven Moduln (strikt) volle Unterkategorien sind. (Strikt volle Unterkategorien sind volle Unterkategorien, bei denen Abschluß gegen isomorphe Objekte vorliegt (s. a. [39, Def. 19.4.1]). Man kann diesen Sachverhalt auch umkehren:

Satz 0.1 ([26, Theorem 1.1])

Es sei ${}_R\underline{M}$ (strikt) volle Unterkategorie von ${}_R\underline{mod}$, $\underline{M}_S$ (strikt) volle Unterkategorie von $\underline{mod}_S$. Sei S aus $\underline{M}_S$, R aus ${}_R\underline{M}$. Sind D_1 und D_2 kontravariante Äquivalenzen von $\underline{M}_S$ in ${}_R\underline{M}$ bzw. von ${}_R\underline{M}$ in $\underline{M}_S$, so gibt es einen Bimodul ${}_RU_S$, so daß $D_1 \cong \mathrm{Hom}_S(-, {}_RU_S)$ und $D_2 \cong \mathrm{Hom}_R(-, {}_RU_S)$ ist. Ferner sind alle Objekte aus $\underline{M}_S$ und aus ${}_R\underline{M}$ reflexiv.

Man sagt, daß ${}_RU_S$ eine Moritadualität vermittelt, wenn beide Ringe U- reflexiv sind und die Kategorie der U- reflexiven Moduln aus ${}_R\underline{Mod}$ und die Kategorie der U- reflexiven Moduln aus $\underline{Mod}_S$ abgeschlossen sind gegen Untermoduln, endliche direkte Summen und Faktormoduln. Eine Unterkategorie, die abgeschlossen ist gegen Untermoduln, endliche direkte Summen und Faktormoduln bezeichnet man als dicke Unterkategorie (vgl. [39, Definition 19.5.4]).

Man muß sich auf endliche direkte Summen von reflexiven Moduln beschränken, denn B. Osofsky hat gezeigt:

Satz 0.2 ([36, Lemma 13])

Keine unendliche direkte Summe von, von Null verschiedenen Moduln ist reflexiv.

Von besonderem Interesse ist eine Dualität von zwei Ringen R und S, wenn alle endlich erzeugten Moduln reflexiv sind, d. h., wenn es eine kontravariante Äquivalenz zwischen $\underline{mod}_S$ und ${}_R\underline{mod}$ gibt. Hier gilt:

Satz 0.3 ([26, Theorem 2.4 und 6.3; 3, Theorem 10])

Sind R und S Ringe, so ist äquivalent:

a) $D_1 : \underline{mod}_S \longrightarrow {}_R\underline{mod}$ und $D_2 : {}_R\underline{mod} \longrightarrow \underline{mod}_S$ stellen eine kontravariante Äquivalenz dar, d. h.: Es gibt eine Dualität zwischen $\underline{mod}_S$ und ${}_R\underline{mod}$.

b) R ist linksartinsch, S ist rechtsartinsch. Es gibt einen Bimodul ${}_RU_S$, so daß ${}_RU$ und U_S beide endlich erzeugte injektive Kogeneratoren sind. R ist isomorph zu $End_S(U)$ und S ist isomorph zu $End_R(U)$. $D_1 \cong Hom_S(-,{}_RU_S)$, $D_2 \cong Hom_R(-,{}_RU_S)$.

Der beidseitig injektive Kogenerator ist dabei eindeutig bis auf Bimodulisomorphie ([26, Theorem 4.1]).

Hieraus folgt, daß man sich bei der Suche nach selbstdualen Ringen auf artinsche Ringe beschränken kann.

Es gibt eine ganze Reihe weiterer, zum Teil wesentlich schwächerer, äquivalenter Bedingungen für eine solche Dualität (vgl. z. B. [26, Theorem 6.3; 3, Theorem 6, Theorem 10]). Für diese Arbeit sind folgende Bedingungen von Bedeutung:

Satz 0.4 ([3, Theorem 6])

Für zwei Ringe R und S ist äquivalent:

a) Es existiert eine Dualität zwischen ${}_R\underline{mod}$ und $\underline{mod}_S$.

b) R ist linksartinsch, ${}_RU$ endlich erzeugter injektiver Kogenerator in ${}_R\underline{Mod}$ und $S \cong End_R(U)$.

c) R ist linksartinsch, S ist rechtsartinsch und ${}_RU_S$ ist ein beidseits treuer Modul für den gilt, daß sowohl $Hom_S(-,{}_RU_S)$, als auch $Hom_R(-,{}_RU_S)$ einfache Moduln in einfache überführt.

Somit zeigt man für einen artinschen Ring R, daß er selbstdualer Ring ist, wenn man einen injektiven Kogenerator ${}_RU$ angeben kann, so daß $End_R(U) \cong R$ ist.

Da nach [3, Theorem 5] für den treuen Modul aus Teil c) des Satzes folgt, daß er beidseits ein injektiver Kogenerator ist, kann man Satz 0.4 c) auch so formulieren:

Lemma 0.5

Ist R linksartinscher, S rechtsartinscher Ring, ${}_RU_S$ R-S- Bimodul, ist ferner U sowohl in $\underline{Mod}_S$, als auch in ${}_R\underline{Mod}$ injektiver Kogenerator und überführen die beiden kontravarianten Funktoren $Hom_R(-,{}_RU_S)$ und $Hom_S(-,{}_RU_S)$ einfache Moduln in ebensolche, so vermittelt U eine Moritadualität zwischen R und S.

Somit zeigt man für einen artinschen Ring R, daß er selbstdual ist, wenn man einen Bimodul ${}_RU_R$ angibt, von dem man nachweist, daß er beidseits injektiver Kogenerator ist und daß die beiden kontravarianten Funktoren $\mathrm{Hom}_R(-,{}_RU_R)$ einfache Moduln in ebensolche überführen. Um dieses Lemma anwenden zu können, brauchen wir im weiteren noch ein Kriterium, um angeben zu können, daß ein Bimodul beidseits injektiver Kogenerator ist:

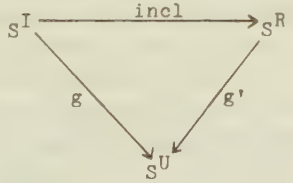
Lemma 0.6 (s. z. B. [4]; s. a. [40, (2.2) Theorem])

a) Es seien R und S beliebige Ringe, R trage eine Struktur als S- Linksmodul durch einen Ringhomomorphismus $F:S\longrightarrow R$. ${}_SU$ sei injektiver S- Linksmodul, dann ist auch ${}_R\mathrm{Hom}_S({}_SR_R,{}_SU)$ injektiv.

b) Ist S semiperfekter Unterring vom semiperfekten Ring R, ${}_SU$ injektiver Kogenerator in ${}_S\underline{\mathrm{Mod}}$, so ist ${}_R\mathrm{Hom}_S({}_SR_R,{}_SU)$ injektiver Kogenerator in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$.

Beweis:

a) (Der Beweis verläuft genau wie im Fall $S = \mathbb{Z}$)
Sei ${}_RI$ Linksideal in R, $f:{}_RI\longrightarrow {}_R\mathrm{Hom}_S(R_R,U)$ R- linear. Sei $g:I\longrightarrow U$ definiert durch $(x)g := (1)(x)f$ für x aus I. g ist S- linear: Die Additivität folgt direkt aus der von f. Für die Multiplikation gilt: $(sx)g = (1)(sx)f = (1)(F(s)x)f = (F(s)\cdot 1)(x)f = (s1)(x)f = s(1)(x)f = s(x)g$. Ist incl die Inklusion von I in R, so hat man folgenden Sachverhalt:



Da ${}_SU$ injektiv ist, existiert ein g', so daß das Diagramm kommutativ wird. Sei $x \in I$, $r \in R$, so gilt: $(r)xg' = (rx)g' = (rx)\mathrm{incl}\circ g' = (rx)g = (1)(rx)f = (1)(r(x)f) = (r)(x)f$. Somit gilt: $xg' = (x)f$ für alle $x \in I$. D. h.: ${}_R\mathrm{Hom}_S(R_R,U)$ ist injektiver R- Modul.

b) Nach Teil a) ist nur noch zu zeigen, daß man jeden einfachen R- Linksmodul in $\mathrm{Hom}_S(R,U)$ R- linear einbetten kann und man ist fertig. Da $\mathrm{pr}_e: R \longrightarrow Re/Je$ für jedes primitive Idempotent e R- linear ist, ist pr_e auch S- linear, denn jeder R- Linksmodul ist auch ein S- Linksmodul. Da ${}_SU$ Kogenerator ist, existiert ein S- lineares $g: Re/Je \longrightarrow U$, so daß $\mathrm{pr}_e g =: f \neq 0$ ist. f ist dann ein Element aus $\mathrm{Hom}_S(R,U)$.

Definiert man $h: Re/Je \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(R,U)$ durch $(re + Je)h :=$ $:= ref$, so ist h trivialerweise R- linear und ungleich Null. Damit ist h injektiv, denn das Bild eines einfachen Moduls ist entweder einfach oder zu diesem Modul isomorph. Somit läßt sich Re/Je in $\mathrm{Hom}_S(R,U)$ einbetten. Also hat man damit einen injektiven Kogenerator in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$.

q.e.d.

Es erhebt sich die Frage, in wie weit ein dualer Ring eindeutig bestimmt ist. Da R dual zu $\mathrm{End}_R(U)$ für jeden endlich erzeugten injektiven Kogenerator U ist, kann man sich in ${}_K\underline{\mathrm{mod}}$ als injektiven Kogenerator die n- fache direkte Summe von K nehmen. Man erhält dann, daß K dual zum n- reihigen Matrizenring über K ist. Damit gibt es sicherlich keine Eindeutigkeit bis auf Isomorphie, um sie doch zu erzwingen, muß man sich auf Basisringe beschränken.

Man bezeichnet als <u>Basismenge</u> von primitiven Idempotenten eines semiperfekten Ringes R eine Menge I, für die gilt: Ist e primitives Idempotent in R, so gibt es ein f aus I, so daß $Re \cong Rf$ ist. Sind e und f aus I und ist $Re \cong Rf$, so ist $e = f$. Für die Idempotente einer solchen Menge fordert man darüberhinaus, daß sie paarweise orthogonal sind, d. h.: $e, f \in I$ und $e \neq f$ folgt $ef = 0 = fe$.

Die Summe über die Elemente einer solchen Menge definiert ein <u>Basisidempotent</u>. Sind e und f Basisidempotente, so sind die Ringe eRe und fRf zueinander isomorph. Einen solchen Ring bezeichnet man als <u>Basisring</u> von R. Ein semiperfekter Ring ist zu seinem Basisring Morita- äquivalent ([1, 27.14. Proposition]).

Ein Ring ist genau dann Basisring, wenn er modulo seinem

Radikal Produkt von Schiefkörpern ist (s. z. B. [1, 27.15. Proposition]).

Sind S und T zu R duale Ringe, so kann man zeigen, daß die Basisringe von S und von T zueinander isomorph sind, d. h.: S und T sind zueinander Morita- äquvalente Ringe. Ferner gilt, daß genau dann R zu S dual ist, wenn die Basisringe von R und S zueinander dual sind ([26, Theoram 8.1]). Damit folgt: Ist R zu S dual, S zu T Morita- äquivalent, so ist R damit auch zu T Morita- dual.

Somit kann man sich bei der Untersuchung von Ringen auf Selbstdualität im wesentlichen auf Basisringe beschränken.

Bezeichne im weiteren D beide, die Dualität bedingenden Funktoren. Sei der Linksannulator $l_A(B) := \{ a \in A \mid aB = 0 \}$ und der Rechtsannulator $r_A(B) := \{ a \in A \mid Ba = 0 \}$, wobei A und B Teilmengen eines Ringes bzw. eines Moduls seien. Es gilt dann:

Satz 0.7 ([26, Theorem 2.8])

Für alle Objekte N in $\underline{\text{mod}}_S$ und alle Objekte M in ${}_R\underline{\text{mod}}$ und alle Untermoduln K von N, A von M, L von D(N) und B von D(M) gilt, wenn $D = \text{Hom}_R(-, {}_RU_S)$ bzw. $D = \text{Hom}_S(-, {}_RU_S)$ ist:

$$l_M r_{D(M)}(A) = A \qquad r_N l_{D(N)}(K) = K$$

$$r_{D(M)} l_M(B) = B \qquad l_{D(N)} r_N(L) = L$$

Speziell definieren die Annulatoren einen Antiisomorphismus der Untermodulverbände von von M und D(M), bzw. N und D(N).

Auf analoge Weise erhält man:

(0.1) $I \longmapsto r_U(I)$ ist ein Antiisomorphismus vom Verband der zweiseitigen Ideale von R in den Verband der Biuntermoduln von U. $H \longmapsto l_U(H)$ ist der analoge Verbandsantiisomorphismus vom Verband der zweiseitigen Ideale von S in den Verband der zweiseitigen Untermoduln von U. $V \longmapsto l_R(V)$ und $V \longmapsto r_S(V)$ sind die jeweils inversen Verbandsantiisomorphismen.
$I \longmapsto r_S r_U(I)$ und $H \longmapsto l_R l_U(H)$ sind zueinander inverse Verbandsisomorphismen vom Verband der zweisei-

tigen Ideale von R in den entsprechenden Verband bzgl. S und zurück. ([26, Theorem 2.6; 3, Theorem 7])

Weiterhin sind die Zentren zweier dualer Ringe zueinander isomorph ([26, Remark 1.4]) und es gilt ferner:

(0.2) Der Rechtssockel von U ist gleich dem Linkssockel. Ist U sowohl als R- Links- als auch als S- Rechtsmodul minimaler injektiver Kogenerator, so sind die einfachen Untermoduln von U zweiseitige Untermoduln. ([3, Theorem 1])

Zur Charakterisierung von Selbstdualitäten hat J. K. Haack den Begriff der schwach symmetrischen Dualität eingeführt:

(0.3) Ist D der, die Dualität vermittelnde Funktor, gilt für jedes primitive Idempotent e aus R, daß $eR/eJ \cong D(Re/Je)$ ist, so sagt man, daß R eine schwach symmetrische Dualität hat.

Für diese Dualität gilt:

Lemma 0.8 ([16, (3.1) Proposition])

Ein Ring R hat genau dann eine schwach symmetrische Selbstdualität, wenn es einen injektiven Kogenerator ${}_RE_R$ gibt, so daß $Ee \cong E(Re/Je)$ für jedes primitive Idempotent e ist. E ist dabei die injektive Hülle von R/J. D. h., ist R Basisring, so ist E der minimiale injektive Kogenerator.

Neben dem Begriff der schwach symmetrischen Selbstdualität gibt es auch noch den der guten Dualität:

(0.4) Ist R Morita- dual zu S und ist ${}_RU_S$ der, die Dualität vermittelnde injektive Kogenerator, so liegt eine gute Dualität vor, wenn es einen Ringisomorphismus F von R in S gibt, so daß für alle zweiseitigen Ideale in R gilt, daß $r_S r_U(I) = F(I)$ ist.

Ferner folgt natürlich daraus, daß F ein Isomorphismus ist, daß eine gute Dualität auch eine Selbstdualität ist.

Nach [27, §5] (s. a. (1.1)) hat ein Ring mit guter Dualität die Eigenschaft, daß alle Faktorringe selbstdual sind. Als Beispiel für Ringe mit guter Dualität seien angeführt:

Ist R Artinalgebra über seinem Zentrum Z, U minimaler injektiver Kogenerator für Z, so ist R gemäß [40, (2.5) Lemma] vermöge $E := \mathrm{Hom}_Z(R,U)$ selbstdual. Nach (0.1) gilt $r_R l_E(I) = I$ für jedes zweiseitige Ideal in R. Es ist aber $l_E(I) =$

$= \{ f \in E \mid f(I) = 0 \} = r_E(I)$. D. h.: $I = r_R l_E(I) = r_R r_E(I)$.
Damit hat man erhalten:

(0.5) Jede Artinalgebra hat eine gute Dualität.

Um den Zusammenhang zwischen schwach symmetrischer Selbstdualität und guter Dualität angeben zu können, brauchen wir noch eine Definition:

Ein Modul wird distributiv genannt, wenn für alle Untermoduln L, M und N gilt: $L \cap (M + N) = (L \cap M) + (L \cap M)$. Nach [5, Theorem 1; 7, § 4.1] ist dies gleichwertig damit, daß jeder Faktormodul quadratfreien Sockel hat. K. R. Fuller hat gezeigt ([14, 4. Lemma]):

(0.6) Ein R- Linksmodul M ist genau dann distributiv, wenn für alle primitiven Idempotente e aus R gilt, daß der eRe Modul eM einreihig ist.

Lemma 0.9 ([16, (4.1) Proposition])

a) Jeder Ring mit einer guten Dualität hat eine schwach symmetrische.

b) Jeder Ring mit schwach symmetrischer Dualität, für den gilt, daß alle primitiven Links- (oder Rechts-) ideale distributiv sind, hat eine gute Dualität.

Zum Abschluß seien noch die bereits als selbstdual bekannten Ringe aufgeführt:

Sei zuerst einmal das klassische Beispiel für einen artinschen Ring ohne Selbstdualität angegeben:

Von P. M. Cohn ([6, §§ 4, 5]) stammen Beispiele für Schiefkörper K, so daß es zu diesen Schiefkörpern Unterschiefkörper C gibt mit $lg(K_C) = 2$ und $lg({}_CK) = \infty$. Diese Schiefkörper benutzt man für folgende Konstruktion:

(0.7) Der Ring $R := \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & C \end{pmatrix}$ ist ein artinscher Ring, für den es in ${}_R\underline{Mod}$ keinen endlich erzeugten injektiven Kogenerator gibt.

Damit kann es auch keinen Ring S geben mit einer kontravarianten Äquivalenz zwischen ${}_R\underline{mod}$ und $\underline{mod}_S$.

Das wohl einfachste Beispiel für einen selbstdualen Ring ist ein QF- Ring.

B. J. Müller ([27, Theorem 4]) und P. Vamos ([40, Theorem

2.7]) haben gezeigt, daß jede Artinalgebra selbstdaul ist.

K. R. Fuller und J. K. Haack ([15, Theorem 4]) haben für Ringe mit Köchern, die Bäume sind, die Selbstdualität nachgewiesen (s. hierzu auch (4.4) und (4.18)). Dies ist ein Spezialfall von:

Tic tac toe- Ringe über Schiefkörpern wurden von J. K. Haack ([17, 5. Corollary]) als selbstdual nachgewiesen.

(0.8) Ein tic tac toe- Ring nach Mitchell ist ein Unterring des vollen Matrizenringes über einem Ring S, den man erhält, wenn man ein "Muster" von Nullen vorgibt. Somit können an der (i,j)- ten Stelle eines jeden Elementes des Matrizenringes entweder nur Nullen oder jedes beliebige Element des Ringes stehen. (s. a. [24, IX, 8]).

Von J. K. Haack ([16, (4.4) Theorem; 18, 8. Theorem]) stammen auch noch Ergebnisse über die Selbstdualität spezieller einreihiger Ringe (s. hierzu auch Kapitel 3).

M. Auslander, M. I. Platzeck und I. Reiten ([2, § 5]) haben von erblichen artinschen Tensorringen, die die Dualitätsbedingungen nach V. Dlab und C. M. Ringel ([8, § 2]) erfüllen, nachgewiesen, daß sie selbstdual sind.

Für bestimmte Faktorringe von Schiefpolynomringen über Schiefkörpern hat B. Roux ([37, 4.4])bewiesen, daß sie selbstdual sind.

Kapitel 1

Unter- und Faktorringe von Ringen mit Moritadualität

Eine Möglichkeit zu selbstdualen Ringen zu kommen oder Aussagen über die Struktur von dualen Ringen zu erhalten ist die, von bekannten Ringen auszugehen und dann Ringerweiterungen, Unter- oder Faktorringe zu betrachten. So hat z. B. B. J. Müller ([27, §5]) gezeigt:

(1.1) Ist ein Ring R zu einem Ring S vermöge U dual, I zweiseitiges Ideal in R, so ist R/I zu S/H dual, wobei $H := \mathrm{ann}_S\mathrm{ann}_U(I)$ ist. Die Dualität wird von $U' := \mathrm{ann}_U(I)$ vermittelt.

Desweiteren hat B. J. Müller gezeigt ([27, Theorem 10]):

(1.2) Ist R vermöge eines S- R- Bimoduls U zu S dual, X ein R- R- Bimodul, so ist $R \times X$, die triviale Erweiterung von R mit X, mit $(r,x)(r',x') := (rr',rx'+xr')$ vermöge $\mathrm{Hom}_R(X, U) \times U$ zu $S \times \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X, U), U)$ dual, wenn X_R und $\mathrm{Hom}_R(X, U)_R$ beide U- reflexiv sind. $R \times X$ operiert dabei auf $\mathrm{Hom}_R(X,U) \times U$ vermöge $(f,u)(r,x) = (fr,f(x)+ur)$. Für $S \times \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X,U), U)$ gelte: $(s,f)(s',f') = (ss',sf'+fs')$. $S \times \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X,U), U)$ operiert auf $\mathrm{Hom}_R(X,U) \times U$ wie folgt: $(s,f)(g,u) = (sg,su+f(g))$.

Ferner hat J. K. Haack gezeigt ([16, (4.1) Proposition]; s. a. Lemma 0.9), daß für jeden artinschen Ring, der eine schwach symmetrische Selbstdualität hat und dessen primitive Links- (oder Rechts-) ideale alle distributiv sind, gilt, daß alle Faktorringe selbstdual sind.

Die analoge Aussage dazu wird in diesem Kapitel für Unterringe bewiesen, für die gilt, daß für jedes primitive Idempotent e aus R eRe im Unterring enthalten ist. Sei deshalb folgende Definition festgelegt:

(1.3) Ein HDE-Unterring S eines artinschen Ringes R sei ein Unterring, für den gilt, daß eRe in S enthalten ist für jedes primitive Idempotent e aus R. (D. h.: bei der Darstellung von R in "Matrixform" bleibt die "Hauptdiagonale" erhalten.)

Die Notwendigkeit einer Zusatzvoraussetzung ergibt sich aus der Betrachtung des Standartbeispieles für einen Ring ohne Dualität (0.7): $R = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, wobei D Schiefkörper, C Unterschiefkörper mit $lg(D_C) = 2$, $lg({}_CD) = \infty$ ist. R ist Unterring des zweireihigen Matrizenringes über D oder auch von $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$, die beide Morita- selbstdual sind.

Sei erst einmal für beweistechnische Zwecke gezeigt:

Lemma 1.1

Es sei R linksartinscher Ring.

a) Ist R Basisring, $e_1, \ldots, e_n$ eine vollständige Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente von R, so gilt:

$$\mathrm{Rad}(R) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} e_i R e_j + \sum_{t=1}^{n} \mathrm{Rad}(e_t R e_t).$$

b) Ist S Basisring und Unterring von R, ist ferner f Idempotent in R und fRf in S enthalten, so ist auch fRf Basisring.

c) Ist R Basisring, I zweiseitiges Ideal in R, so ist auch R/I Basisring.

d) Gibt es zu R einen dualen Ring, ist ferner $f_1, \ldots, f_n$ eine vollständige Menge paarweise orthogonaler, nicht notwendig primitiver Idempotente in R, so gibt es einen Ring R', so daß gilt: R' ist zu R dual, zu jedem f_i gibt es ein $f_i' \in R'$ so daß die Menge der f_i' eine vollständige Menge paarweise orthogonaler Idempotente von R' darstellt. Außerdem gilt: $E(Rf_i/Jf_i) \cong Uf_i'$, wobei ${}_{R'}U_R$, der die Dualität zwischen R und R' vermittelnde injektive Kogenerator ist ($U = E(R/J)$, $R' = \mathrm{End}_R(U)$).

Beweis:

a) Sei $N := \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} e_i R e_j + \sum_{t=1}^{n} e_t \mathrm{Rad}(R) e_t$.

Bekanntlich ist $\mathrm{Rad}(e_iRe_i) = e_i\mathrm{Rad}(R)e_i$ (s. z. B. [23, Korollar 2 zu Satz 8.1.15]). N ist als Summe abelscher Gruppen additiv abgeschlossen und damit Untergruppe von R.

N ist auch multiplikativ abgeschlossen:
Sei $e_ise_j \in R$, $e_jre_k \in N$. Angenommen $e_ise_je_jre_k \notin N$. Dann muß auf Grund der Konstruktion von N $e_i = e_k$ sein. Ist auch $j = i$, so ist e_ire_j aus $\mathrm{Rad}(e_iRe_i)$. Damit ist aber auch $e_ise_je_jre_k \in e_i\mathrm{Rad}(R)e_i \subset N$. Also gelte $i = k \neq j$. Da $e_ise_je_jre_i \in e_iRe_i$ ist und dieses Produkt nicht in N, d. h. nicht in $\mathrm{Rad}(e_iRe_i)$ sein soll, folgt, daß $e_ise_je_jre_i$ invertierbar ist in e_iRe_i, denn e_iRe_i ist ein lokaler Ring. Es existiert also ein $e_is'e_i$ aus e_iRe_i, so daß $e_is'e_ie_ise_je_jre_i = e_i$ ist. Damit gibt es die R- linearen Abbildungen

$$f: Re_j \longrightarrow Re_i \qquad g: Re_i \longrightarrow Re_j$$
$$ae_j \longmapsto ae_je_jre_i \qquad ae_i \longmapsto ae_ie_is'e_ie_ise_j$$

mit $g \circ f = \mathrm{id}_{Re_i}$, d. h., f ist surjektiv. Da Re_i projektiv ist, ist $\ker(f)$ direkter Summand von Re_j nach [1, 17.2. Proposition]. Da Re_j unzerlegbar ist, folgt damit, daß $\ker(f) = 0$ ist. Also ist f ein Isomorphismus. Da R Basisring sein soll, folgt also $i = j$. Widerspruch zu $i \neq j$!

Somit ist N Linksideal in R. Gleiches gilt natürlich auch für die Rechtsstruktur. Somit ist N zweiseitiges Ideal in R.

Nach [1, 28.10. Lemma] gilt: N ist genau dann links- (bzw. rechts-) nilpotent, wenn e_iNe_i für alle e_i links- (bzw. rechts-) nilpotent ist. Da aber $e_iNe_i = \mathrm{Rad}(e_iRe_i)$ ist, folgt e_iNe_i ist nilpotent. Also ist auch N nilpotent.

R/N ist trivialerweise isomorph zu $\prod_{i=1}^{n} e_iRe_i/\mathrm{Rad}(e_iRe_i)$.

Der zweite Term ist aber Produkt von Schiefkörpern. Also liegt jedes nilpotente Ideal in N. Damit ist N das größte nilpotente Ideal in R. Dies bedeutet, daß $N = \mathrm{Rad}(R)$ ist.

b) Seien $e_1, e_2 \in fRf$ orthogonale primitive Idempotente, sei ferner $fRe_1 \cong fRe_2$. Dann existiert nach [1, 4.6. Propo-

sition] ein e_1re_2 aus fRf und ein $e_2r'e_1$ aus fRf, so daß die Isomorphie durch $fse_1 \longmapsto fse_1e_1re_2$ und ihre Umkehrung durch $fse_2 \longmapsto fse_2e_2r'e_1$ dargestellt wird. Da fRf in S liegt, sind e_1re_2 und $e_2r'e_1$ auch in S enthalten. Damit sind $se_1 \longmapsto \longmapsto se_1e_1re_2$ und $se_2 \longmapsto se_2e_2r'e_1$ zueinander inverse Isomorphismen von Se_1 in Se_2 bzw. von Se_2 in Se_1. Da S Basisring ist, folgt $e_1 = e_2$. Somit ist auch fRf Basisring.

c) Es gilt für einen linksartinschen Ring R:

(1.4) $\mathrm{Rad}(R/I) = (J + I)/I$ für alle zweiseitigen Ideale I von R.

Denn nach [1, 15.8. Corollary] erhält man: $\mathrm{Rad}(R/I) \supset (J+I)/I$. Nach [21, 8.2.2 Folgerung] ist jeder Faktorring von R/J halbeinfach. Nach dem zweiten Isomorphiesatz gilt:
$(R/J)/((J+I)/J) \cong R/(J+I) \cong (R/I)/((J+I)/I)$.
Damit muß aber (J+I)/I das Radikal von R/I umfassen.

Ist R Basisring, so ist R/J isomorph zu einem Produkt von Schiefkörpern. D. h.: $R/J \cong \prod_{i=1}^{n} D_i =: D$. Sei $x_i \in D$ definiert durch $x_i := (a_1,\ldots,a_n)$ mit $a_j := 0$ für $i \neq j$, $a_i := 1$. Ist H ein zweiseitiges Ideal in D, so gilt: Ist $x_i \in H$, so ist auch $D_ix_i \subset H$; ist $x_i \notin H$, so ist auch $d_ix_i \notin H$ für $0 \neq d_i \in D_i$, denn alle von Null verschiedenen d_i sind invertierbar. D. h., es gibt m natürliche Zahlen $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_m \leqslant n$, so daß $H \cong \prod_{i=1}^{m} D_{k_i}$ ist. Damit ist D/H wieder isomorph zu einem Produkt von Schiefkörpern. Also ist jeder Faktorring eines endlichen Produktes von Schiefkörpern wieder ein (endliches) Produkt von Schiefkörpern.

Damit ist $(R/J)/((J+I)/J)$ Produkt von Schiefkörpern. Aus dem zweiten Isomorphiesatz folgt dann wieder, daß damit auch $(R/I)/((J+I)/I) = (R/I)/\mathrm{Rad}(R/I)$ Produkt von Schiefkörpern ist. Somit ist R/I Basisring.

d) Setzt man ${}_RU := \bigoplus_{i=1}^{k} E(Rf_i/Jf_i)$, $R' := End_R(U)$, so ist R' zu R dual nach Satz 0.4. Man kann f_i' als jenen idempotenten Endomorphismus von U wählen, für den $E(Rf_i/Jf_i) = Imf_i'$ gilt ([1, 5.7. Proposition]). Damit erhält man die gewünschten Eigenschaften.

q.e.d.

Lemma 1.2

Es sei R linksartinscher Ring. R sei vermöge ${}_RU_{R'}$ zu R' dual. Seien e und f von Null verschiedene orthogonale Idempotente aus R, e' und f' orthogonale Idempotente aus R' mit $Ue' \cong E(Re/Je)$ und $Uf' \cong E(Rf/Jf)$. Ferner seien eRe und fRf Basisringe. Dann gilt:

i) $eU \cong E(e'R'/e'J')$ und $fU \cong E(f'R'/f'J')$ $(J' = Rad(R'))$.

ii) eRe ist vermöge eUe' zu e'R'e' dual und es gilt: $Soc(eUe') \cong eRe/eJe$.

iii) eRe + fRf + eRf ist vermöge $(e + f)U(e' + f')/eUf'$ zu e'R'e' + f'R'f' + e'R'f' dual.

iv) $ann_{fUe'}ann_{e'R'f'}(fVe') = fVe' = ann_{fUe'}ann_{eRf}(fVe')$ für jeden fRf- e'R'e'- Untermodul fVe' von fUe'. Für jeden eRe- fRf- Untermodul eIf von eRf gilt: $ann_{eRf}ann_{fUe'}(eIf) = eIf$. Für jeden e'R'e'- f'R'f'- Untermodul e'I'f' von e'R'f' gilt: $ann_{e'R'f'}ann_{fUe'}(e'I'f') = e'I'f'$.

v) $ann_{e'R'f'}ann_{fUe'}(-)$ stellt eine Verbandsisomorphie zwischen den eRe- fRf- Untermoduln von eRf und den e'R'e'- f'R'f'- Untermoduln von e'R'f' dar. $ann_{eRf}ann_{fUe'}(-)$ ist der inverse Verbandsisomorphismus. $ann_{fUe'}(-)$ ist ein Verbandsantiisomorphismus, sowohl von den Biuntermoduln von eRf, als auch von den Biuntermoduln von e'R'f' ausgehend. Die inversen Verbandsantiisomorphismen sind $ann_{eRf}(-)$ bzw. $ann_{e'R'f'}(-)$.

vi) Ist eIf ein eRe- fRf- Untermodul von eRf, $g: eIf \longrightarrow eUe'$ eRe- linear, so existiert ein $fu_ge' \in fUe'$: $(erf)g = erffu_ge'$ für alle erf aus eIf.

Beweis:

Es sei o. B. d. A. $R' = End_R(U)$, $e = \sum_{i=1}^{m} e_i$ mit primitiven Idempotenten e_i aus eRe. Nach Satz 0.3 ist R' rechtsartinsch.

i) Es ist $Ue' \cong E(Re/Je)$, $E(Re/Je) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} E(Re_i/Je_i)$. Die $E(Re_i/Je_i)$ sind unzerlegbar. Es gibt also Untermoduln U_i von Ue', die direkte Summanden von Ue' sind: $U_i \cong E(Re_i/Je_i)$. Da $R' = End_R(U)$ ist, gibt es in R' primitive Idempotente e_i' ([1, 5.8. Corollary]): $U_i = Ue_i' \cong E(Re_i/Je_i)$. Somit gibt es m primitive Idempotente e_i': $\sum_{i=1}^{m} e_i' = e'$. Da $R \cong End_{R'}(U)$ und e_i primitiv ist, folgt: e_iU ist unzerlegbarer injektiver R'-Modul ([1, 5.11. Corollary]). D. h.: $e_iU \cong E(e''R'/e''J')$, wobei e'' ein primitives Idempotent in R' ist. Da aber $e_iSoc({}_RUe_i') \neq 0$ ist, existiert also ein $0 \neq e_iue_i' \in Soc({}_RU) = Soc(U_{R'})$. Damit gilt: $Soc(e_iU_{R'})e_i' \neq 0$, d. h.: $e_iU \cong E(e_i'R'/e_i'J')$. Somit gilt: $eU \cong \bigoplus_{i=1}^{m} e_iU \cong \bigoplus_{i=1}^{m} E(e_i'R'/e_i'J') \cong E(e'R'/e'J')$. Gleiches gilt natürlich auch für f.

ii) Nach [13, Lemma 2.2.] ist eUe' über eRe injektiv. Da $Ue' \cong \bigoplus_{i=1}^{m} E(Re_i/Je_i)$ ist, folgt aus [13, Lemma 2.2.] weiter: $eUe' \cong \bigoplus_{i=1}^{m} E(eRe_i/eJe_i)$. Da $E(eRe/eJe) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} E(eRe_i/eJe_i)$ ist, folgt, daß $Soc({}_{eRe}eUe') \cong eRe/eJe$ ist. D. h.: eUe' ist injektiver Kogenerator für eRe. Also ist eRe zu $End_{eRe}(eUe')$ dual. Nach [13, Lemma 2.1.] gilt: $End_{eRe}(eUe') \cong End_R(Ue')$. Nach [1, Proposition 5.9.] gilt: $End_R(Ue') \cong e'End_R(U)e' = e'R'e'$. Somit gilt: eRe ist vermöge eUe' zu e'R'e' dual.

iii) Trivialerweise sind $e'R'e' + f'R'f'$ und $e'R'e' + f'R'f' + e'R'f'$ nicht nur abelsche Untergruppen von R, sondern sie

sind auch multiplikativ abgeschlossen, d. h. sie sind Ringe. (Da e' + f' die Eins in diesen Ringen darstellt, sind sie nicht notwendigerweise Unterringe von R.) Da $e'R'f'e'R'f' = 0$ ist, kann man $R_t' := e'R'e' + f'R'f' + e'R'f'$ als triviale Ringerweiterung von $R_d' := e'R'e' + f'R'f'$ auffassen.

R_d' ist vermöge $eUe' + fUf'$ zu $R_d := eRe + fRf$ dual, denn R_d' ist im wesentlichen das ringdirekte Produkt von $e'R'e'$ und $f'R'f'$. Nach (1.2) folgt, daß R_t' zu $R_d \times \mathrm{Hom}_{R_d'}(\mathrm{Hom}_{R_d'}(e'R'f', eUe' + fUf'), eUe' + fUf')$ vermöge $\mathrm{Hom}_{R_d'}(e'R'f', eUe' + fUf') \times (eUe' + fUf')$ dual ist, wenn $\mathrm{Hom}_{R_d'}(e'R'f', eUe' + fUf')$ und $e'R'f'$ beide $(eUe' + fUf')$-reflexiv sind.

Ist $M_{R'}$ endlich erzeugt, dann ist auch jeder Untermodul endlich erzeugt nach [1, 15.21. Corollary]. Speziell ist dann $Me'R'_{R'}$ endlich erzeugt. Es existieren also k erzeugende Elemente der Form $m_i = \sum_{j=1}^{k_i} m_{ji}e'r'_{ji}$ mit k_i geeignet, so daß für jedes $xe' = xe'1 \in Me'R'$ k Elemente s_i' aus R' existieren mit $xe' = \sum_{i=1}^{k} m_i s_i' = \sum_{i=1}^{k} m_i s_i'e' = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} m_{ji}e'r'_{ji}s_i'e'$. Damit gibt es endlich viele Elemente der Form $m_{ji}e'$ aus Me', so daß für alle $xe' \in Me'$ $e'r'_{ji}s_i'e' \in e'R'e'$ existieren mit $\sum_{i,j} m_{ji}e'e'r'_{ji}s_i'e' = xe'$. Damit ist $Me'_{e'R'e'}$ endlich erzeugt und folglich reflexiv. Man erhält also:

(1.5) Ist $M_{R'}$ reflexiv, so ist auch $Me'_{e'R'e'}$ reflexiv.

Da e'R' endlich erzeugt, d. h. reflexiv ist, folgt e'R'f' ist reflexiv.

Für die Reflexivität von $\mathrm{Hom}_{R_d'}(e'R'f', eUe' + fUf')$ beachte man, daß allgemein gilt:

(1.6) ${}_S\mathrm{Hom}_A({}_{e''}M_A, {}_S N_A)_{e''Te''}$ ist zu ${}_S\mathrm{Hom}_A(M_A, {}_S N_A)e''_{e''Te''}$ als S- e"Te"- Bimodul isomorph. Dabei seien A, S, T Ringe, M T- A- Bimodul, N S- A- Bimodul und e" von Null verschiedenes Idempotent in T.

Denn sei $pr: M \longrightarrow e''M$ mit $pr(m) := e''m$. pr ist trivialerweise A- linear. Damit ist $F: \mathrm{Hom}_A(e''M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N)e''$ mit $F(g) := (g \circ pr)e''$ wohldefiniert. Es gilt trivialerweise, daß F S- linear ist: $F(sg + g') = ((sg + g') \circ pr)e'' = s(g \circ pr)e'' + (g' \circ pr)e'' = sF(g) + F(g')$. F ist injektiv, denn $F(g) = 0$ folgt $(g \circ pr)e'' = 0$, d. h., $0 = g \circ pr(e''m) = g(e''e''m) = g(e''m)$ für alle m aus M. Daraus folgt $g = 0$.

F ist surjektiv: Denn ist $ge'' \in \mathrm{Hom}_A(M, N)e''$, so ist $g' := g|_{e''M;N}$ ein Element aus $\mathrm{Hom}_A(e''M, N)$ und es gilt: $ge''(m) = g(e''m) = g'(e''m) = g' \circ pr(e''m) = (g' \circ pr)e''(m)$.

F ist e"Te"- linear: $(F(g)e''te'')(m) = ((g \circ pr)e'')e''te''(m) = (g \circ pr)(e''te''m) = g(e''e''te''m) = g(e''te''e''m) = ge''te''(e''m) = (ge''te'') \circ pr(e''m) = F(ge''te'')(m)$. Somit ist (1.6) gezeigt.

Außerdem gilt: $\mathrm{Hom}_{R'_d}(e'R'f', eUe' + fUf')$ ist als R_d- R'_d- Bimodul isomorph zu $\mathrm{Hom}_{f'R'f'}(e'R'f', fUf')$: Denn $g(e'r'f') = g(e'r'f')f'$ für alle $e'r'f'$ aus $e'R'f'$ und für alle g aus $\mathrm{Hom}_{R'_d}(e'R'f', eUe' + fUf')$. Da aber $eUe'f' = 0$ ist, folgt, daß $\mathrm{Im}(g) \subset fUf'$ ist. Da andererseits $e'R'e'$ $e'R'f'$ und eUf' annuliert, ist jede $f'R'f'$- lineare Abbildung auch R'_d- linear.

Wendet man jetzt (1.6) an, so erhält man: $\mathrm{Hom}_{f'R'f'}(e'R'f', fUf') \cong \mathrm{Hom}_{f'R'f'}(R'f', fUf')e'$. Da $fU \cong E(f'R'/f'J')$ und $fRf \cong \mathrm{End}_{R'}(fU)$ ist, erhält man nach [13, Lemma 2.3] $\mathrm{Hom}_{f'R'f'}(R'f', fUf') \cong fU$. Damit ist $fUe' \cong \mathrm{Hom}_{f'R'f'}(R'f', fUf')e' \cong \mathrm{Hom}_{R'_d}(e'R'f', eUe' + fUf')$. Da fU reflexiver R'- Modul ist, ist nach (1.5) fUe' reflexiv. Damit existiert die Dualität für R'_t.

Weiterhin gilt: $eR \cong \mathrm{Hom}_{e'R'e'}(Ue', eUe')$ als eRe- R- Bimodul nach [13, Lemma 2.3.]. Also gilt: $\mathrm{Hom}_{R'_d}(\mathrm{Hom}_{R'_d}(e'R'f', eUe' + fUf'), eUe' + fUf') \cong$

$\cong \mathrm{Hom}_{R_d'}(fUe', eUe' + fUf') \cong \mathrm{Hom}_{e'R'e'}(fUe', eUe') \cong$

$\cong \mathrm{Hom}_{e'R'e'}(Ue', eUe')f \cong eRf$. Dies alles sind eRe- fRf- und damit R_d- R_d- lineare Isomorphismen. Dabei folgt die zweite Isomorphie analog der zwischen $\mathrm{Hom}_{R_d'}(e'R'f', eUe' + fUf')$ und $\mathrm{Hom}_{e'R'e'}(e'R'f', fUf')$. Damit ist R_t' zu $R_d \times eRf$ dual. Da trivialerweise $eRfeRf = 0$ ist, folgt $eRe + fRf + eRf =: R_t$ ist zu $R_d \times eRf$ isomorph. Somit ist R_t' zu R_t dual.

Die Dualität wird von $(eUe' + fUf') \times fUe'$ vermittelt. Dabei gilt: $(r + esf)(u,fve') = (ru + esffve', rfve')$, sowie $(u,fve')(r' + e's'f') = (ur' + fve'e's'f', fve'r')$ für $r \in R_d$, $r' \in R_d'$, $esf \in eRf$, $e's'f' \in e'R'f'$, $u \in eUe' + fUf'$ und $fve' \in fUe'$. Trivialerweise ist eUf' R_t- R_t'- Biuntermodul von $(e + f)U(e' + f')$. Denn $0 = fRfeUf' = eUf'e'R'e' = eRfeUf' = eUf'e'R'f'$, $eReeUf' = eUf' = eUf'f'R'f'$. Somit existiert der R_t- R_t'- Bimodul $U_t := (e + f)U(e' + f')/eUf'$. $(eUe' + fUf') \times fUe'$ ist zu U_t vermöge $((eue'+fvf', fwe'))g := eue' + fvf' + fwe' + eUf'$ isomorph. g ist trivialerweise additiv und bijektiv. Ferner gilt: $(ere + fsf + eaf)((eue' + fvf', fwe'))g = ereeue' + fsffvf' + fsffwe' + eaffwe' + eUf' = ((ereeue' + fsffvf' + eaffwe', fsffwe'))g = ((ere + fsf + eaf)(eue' + fvf', fwe'))g$. Analoges gilt für die R_t'- Linearität. Damit ist R_t zu R_t' vermöge U_t dual.

iv) Es ist $R_t eRf R_t = eRf$. D. h.: Ist eIf eRe- fRf- Biuntermodul von eRf, so ist eIf auch zweiseitiges Ideal in R_t. Sei $U_d := fUf' + eUe' + eUf'$, so gilt: $eRfU_d \subset eUf'$. D. h.: $eRf(U_d/eUf') = 0$. Daraus folgt $(\mathrm{ann}_{fUe'}(eIf) + U_d)/eUf' \subset \subset \mathrm{ann}_{U_t}(eIf)$. Andererseits gilt für $u + eUf' \in U_t$ mit $fue' \notin \notin \mathrm{ann}_{fUe'}(eIf)$: $eIf \cdot ue' \neq 0$, d. h., $eIf(u + eUf') \neq 0$. D. h.:

(1.7) $\mathrm{ann}_{U_t}(eIf) = (\mathrm{ann}_{fUe'}(eIf) + U_d)/eUf'$.

Ist fVe' zweiseitiger Untermodul von fUe', so ist $(fVe' + U_d)/eUf'$ zweiseitiger Untermodul von U_t und es gilt:

$ann_{R_t}((fVe' + U_d)/eUf') = ann_{eRf}((fVe' + U_d)/eUf')$. Denn da fUf' injektiver Kogenerator ist für fRf folgt für $r \in R_t$ mit $frf \neq 0$ existiert ein fuf': $frffuf' \neq 0$. D. h.: $frf(fuf'+eUf') \neq 0$. Gleiches gilt auch für eRe. Aus $r(fVe' + U_d)/eUf' = 0$ folgt also $ere = 0 = frf$, d. h.: $r \in eRf$.

Ferner gilt $ann_{eRf}((fVe'+U_d)/eUf') = ann_{eRf}((fVe'+eUf')/eUf')$. Denn $eRf(U_d/eUf') = (eRffUf' + eRfeUe' + eRfeUf')/eUf' =$ $= eUf'/eUf' = 0$ in U_t. D. h., es ist $erf(fVe' + U_d)/eUf' =$ $= 0$ genau dann, wenn $erf(fVe' + eUf')/eUf' = 0$ ist. Da weiterhin $erffVe' = 0$ äquivalent zu $erffVe' \in eUf'$ ist, folgt: $ann_{eRf}((fVe' + eUf')/eUf') = ann_{eRf}(fVe')$. D. h.:

(1.8) $ann_{R_t}((fVe' + U_d)/eUf') = ann_{eRf}(fVe')$.

Analog zu (1.7) gilt für einen zweiseitigen Untermodul e'I'f' von e'R'f', daß e'I'f' zweiseitiges Ideal in R_t ist, ferner gilt:

(1.7') $ann_{U_t}(e'I'f') = (ann_{fUe'}(e'I'f') + U_d)/eUf'$

Desweiteren gilt analog zu (1.8):

(1.8') $ann_{e'R'f'}(fVe') = ann_{R_t'}((fVe' + U_d)/eUf')$

für jeden zweiseitigen Untermodul fVe' von fUe'.

Aus (0.1), den Gleichungen für die Annulatoren, folgt: $eIf = ann_{R_t}(ann_{U_t}(eIf))$, d. h.: $eIf = ann_{R_t}ann_{U_t}(eIf) =$ $= ann_{R_t}((ann_{fUe'}(eIf) + U_d)/eUf') = ann_{eRf}ann_{fUe'}(eIf)$.

Analog folgt $ann_{e'R'f'}ann_{eUf'}(e'I'f') = e'I'f'$. Ferner gilt: $(fVe' + U_d)/eUf' = ann_{U_t}ann_{R_t}((fVe' + U_d)/eUf') =$ $= ann_{U_t}(ann_{eRf}(fVe')) = (ann_{fUe'}ann_{eRf}(fVe') + U_d)/eUf'$. D. h.: $fVe' = ann_{fUe'}ann_{eRf}(fVe')$. Analog folgt: $ann_{fUe'}ann_{e'R'f'}(fVe') =$ $= fVe'$.

v) Da $(ann_{fUe'}(eIf) + U_d)/eUf' = ann_{U_t}(eIf)$ Biuntermodul von U_t ist, folgt speziell: $ann_{fUe'}(eIf)$ ist zweiseitiger

Untermodul von fUe'. Da $ann_{R_t}(fVe' + U_d)/eUf') = ann_{eRf}(fVe')$ zweiseitiges Ideal in R_t ist, ist speziell $ann_{eRf}(fVe')$ Biuntermodul von eRf. D. h.: $ann_{eRf}(-)$ ist eine Abbildung vom Verband der zweiseitigen Untermoduln von fUe' in den Verband der zweiseitigen Untermoduln von eRf, $ann_{fUe'}(-)$ ist eine Abbildung vom Verband der zweiseitigen Untermoduln von eRf in den Verband der zweiseitigen Untermoduln von fUe'.

Da nach iv) gilt: $ann_{eRf}ann_{fUe'}(eIf) = eIf$ für jeden zweiseitgen Untermodul eIf von eRf und $ann_{fUe'}ann_{eRf}(fUe') = fUe'$ für jeden Biuntermodul fVe' von fUe', folgt: $ann_{fUe'}(-)$ und $ann_{eRf}(-)$ sind bijektiv.

Aus $fVe' \subset fWe'$ folgt $(fVe' + U_d)/eUf' \subset (fWe' + U_d)/eUf'$, daraus folgt $ann_{eRf}(fVe') = ann_{R_t}((fVe' + U_d)/eUf') \supseteq$ $\supseteq ann_{R_t}((fWe' + U_d)/eUf') = ann_{eRf}(fWe')$, denn $ann_{R_t}(-)$ ist ein Verbandsantiisomorphismus. Damit ist $ann_{eRf}(-)$ auch ein Verbandsantiisomorphismus und $ann_{fUe'}(-)$ ist der dazu inverse Verbandsantiisomorphismus.

Mit (1.7') und (1.8') erhält man analog: $ann_{e'R'f'}(-)$ und $ann_{fUe'}(-)$ sind zueinander inverse Verbandsantiisomorphismen vom Verband der zweiseitigen Untermoduln von fUe' in den Verband der zweiseitigen Untermoduln von e'R'f' bzw. umgekehrt.

Damit sind $ann_{eRf}ann_{fUe'}(-)$ und $ann_{e'R'f'}ann_{fUe'}(-)$ Verbandsisomorphismen vom Verband der zweiseitigen Untermoduln von e'R'f' in den Verband der Biuntermoduln von eRf bzw. zurück. Es ist evident, daß diese beiden Verbandsisomorphismen zueinander invers sind.

vi) Ist $g: eIf \longrightarrow eUe'$ eRe- linear, so läßt sich g fortsetzen als $g': eIf \longrightarrow U_t$, $(erf)g' := (erf)g + eUf'$. g' ist trivialerweise additiv. eIf ist als zweiseitiger Untermodul von eRf zweiseitiges Ideal in R_t. Da $((esf + fs'f)erf)g' =$ $= 0 = (esf + fs'f)(erf)g'$ ist, folgt aus der eRe- Linearität von g, daß g' R_t- linear ist. Da U_t injektiver Kogenerator

für R_t ist, gibt es zu g' ein u + eUf' aus U_t, so daß gilt: (erf)g' = erf(u + eUf'). Da erf(u + eUf') = erfu + eUf' = = erf fu + eUf' ist, läßt sich u so wählen, daß u = fu ist. Da für fu = fve' + fwf' gilt, daß erf(fve' + fwf' + eUf') = = erffve' + erffwf' + eUf' = erffve' + eUf' ist, kann man also u = fue' wählen.

Damit existiert ein fue' $\in$ fUe', so daß für alle erf $\in$ $\in$ eIf gilt: (erf)g + eUf' = erffue' + eUf'. D. h.: (erf)g - - erffue' $\in$ eUf'. Da eUf' $\cap$ eUe' = 0 und Im(g) $\subset$ eUe' ist, folgt, daß erffue' = (erf)g ist. Damit gibt es zu jedem eRe-fRf- Untermodul eIf von eRf und zu jedem $g \in \mathrm{Hom}_{eRe}(eIf, eUe')$ ein fue' aus fUe', so daß für alle erf aus eIf gilt: (erf)g = = erffue'.

q.e.d.

Damit kommen wir zum Satz dieses Kapitels:

Satz 1.3

Es sei R ein linksartinscher Ring. Sei R zu R' vermöge $_RU_{R'}$ dual. Sei $f_1, \ldots, f_k$ eine vollständige Menge paarweise orthogonaler, nicht notwendig primitiver Idempotente von R. Sei $f_1', \ldots, f_k'$ eine vollständige Menge paarweise orthogonaler Idempotente von R', so daß für alle i $E(Rf_i/Jf_i) \cong Uf_i'$ ist.

a) Ist S Unterring von R mit $f_i R f_i \subset S$ für alle i, so ist $E := U/L$ mit $L := \sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{ann}_{f_j U f_i'}(f_i S f_j)$ injektiver Kogenerator für S. E vermittelt eine Dualität zwischen S und S', mit $f_i' S' f_j' := \mathrm{ann}_{f_i' R' f_j'} \mathrm{ann}_{f_j U f_i'}(f_i S f_j)$ und $S' := \sum_{i,j=1}^{k} f_i' S' f_j'$. Ferner gilt: $Ef_i' = E(Sf_i/\mathrm{Rad}(S)f_i)$.

b) Ist I zweiseitiges Ideal in R, so ist R/I zu R'/I' dual. Die Dualität wird von $V := \sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{ann}_{f_j U f_i'}(f_i I f_j)$ vermittelt. Dabei ist $I' := \sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{ann}_{f_i' R' f_j'} \mathrm{ann}_{f_j U f_i'}(f_i I f_j)$. Ferner gilt: $I' = \mathrm{ann}_R \mathrm{ann}_U(I)$, $V = \mathrm{ann}_U(I)$. Und außerdem gilt für alle i: $V(f_i' + I) = E((R/I)(f_i + I)/\mathrm{Rad}((R/I)(f_i + I)))$.

Beweis:

Man kann o. E. d. A. annehmen, daß die f_iRf_i Basisringe sind. Da man o. E. d. A. S als Basisring voraussetzen kann, folgt dies im ersten Fall aus Lemma 1.1 b), im zweiten Fall folgt dies daraus, daß man R als Bsaisring voraussetzen kann, denn die zweiseitigen Ideale eines Ringes entsprechen denen des dazugehörigen Basisringes.

Da $f_iRf_i \subset S$ ist, folgt: $f_iRf_i \cdot f_iSf_j \cdot f_jRf_j \subset f_iSf_j$. D. h., f_iSf_j ist f_iRf_i- f_jRf_j- Untermodul von f_iRf_j. Analog gilt: $f_iRf_i \cdot f_iIf_j \cdot f_jRf_j \subset f_iIf_j$, d. h.: f_iIf_j ist zweiseitiger Untermodul von f_iRf_j.

Seien $N \subset f_iRf_j$, $M \subset f_jRf_p$, $N \cdot M \subset P \subset f_iRf_p$ jeweils Unterbimoduln. Sei $N' := \operatorname{ann}_{f_iR'f_j}\operatorname{ann}_{f_jUf_i}(N)$, M' und P' seien die entsprechenden doppelten Annulatoren von M und P. Dann gilt: $N' \cdot M' \subset P'$:

Denn sei $u \in \operatorname{ann}_{f_pUf_i}(N \cdot M)$ beliebig, dann gilt: Für alle $r \in N$ und $s \in M$ ist $rsu = 0$. Also gilt für alle $r \in N$: $rsu = 0$. D. h.: $su \in \operatorname{ann}_{f_jUf_i}(N)$. Damit gilt für alle $r' \in N'$: $(su)r' = 0$. Da dies für alle $s \in M$ gilt, hat man: $M(ur') = 0$. D. h.: $ur' \in \operatorname{ann}_{f_pUf_j}(M)$. Damit ist für alle $s' \in M'$ $(ur')s' = 0$, d. h.: $uN'M' = 0$. Da u beliebig war, folgt also: $\operatorname{ann}_{f_iR'f_p}\operatorname{ann}_{f_pUf_i}(N \cdot M) \supset N'M'$. Da $N \cdot M$ Teilmenge von P ist, folgt gemäß [1, 2.15. Proposition] $P' = \operatorname{ann}_{f_iR'f_p}\operatorname{ann}_{f_pUf_i}(P) \supset \supset \operatorname{ann}_{f_iR'f_p}\operatorname{ann}_{f_pUf_i}(N \cdot M) \supset N'M'$. Damit gilt:

(1.9) $S' := \sum_{i,j=1}^{k} \operatorname{ann}_{f_iR'f_j}\operatorname{ann}_{f_jUf_i}(f_iSf_j)$ ist Unterring,

$I' := \sum_{i,j=1}^{k} \operatorname{ann}_{f_iR'f_j}\operatorname{ann}_{f_jUf_i}(f_iIf_j)$ ist zweiseitiges Ideal von R'.

(Die additive Abgeschlossenheit von S' und I' ist trivial.)

a) Da R linksartinscher Ring ist, ist Rf_iSf_j, das von f_iSf_j erzeugte Linksideal, endlich erzeugt ([1, 15.20. Theorem]). $f_i(Rf_iSf_j) \subset f_iSf_j$, denn f_iSf_j ist f_iRf_i- Modul. Damit folgt: $f_i(Rf_iSf_j) = f_iRf_if_iSf_j = f_iSf_j$. Nach (1.5) folgt dann, daß f_iSf_j reflexiver f_iRf_i- Modul ist. Also ist f_iSf_j endlich erzeugter f_iRf_i-, d. h. f_iSf_i- Modul. Somit gilt:

$$lg({}_SS) \leq \sum_{i,j=1}^{k} lg({}_{f_iSf_i}f_iSf_j) < \infty .$$

Damit hat S eine Kompositionsreihe als Linksmodul über sich. Also ist S nach [1, 11.1. Proposition] linksartinsch.

Nach Satz 0.3 ist R' rechtsartinsch, also ist S' mit der analogen Argumentation rechtsartinsch.

Es ist U trivialerweise S- S'- Bimodul. Ferner ist

$L := \sum_{i,j=1}^{k} ann_{f_iUf_j'}(f_jSf_i)$ S- S'- Biuntermodul von U:

Sei $f_iuf_j' \in L$, $f_prf_i \in S$ und $f_prf_if_iuf_j' \notin L$. Dann ist $f_prf_if_iuf_j' \notin ann_{f_pUf_j'}(f_jSf_p)$. D. h., es existiert ein $f_jsf_p \in f_jSf_p$, so daß $0 \neq f_jsf_pf_prf_if_iuf_j' = (f_jsf_pf_prf_i)f_iuf_j'$ ist. Damit ist $f_iuf_j' \notin ann_{f_iUf_j'}(f_jSf_i) = f_iLf_j'$. Widerspruch!

Für die analoge Argumentation von rechts beachte man, daß nach Lemma 1.2 iv) gilt: $ann_{f_jUf_i'}ann_{f_iR'f_j'}(f_jWf_i') = f_jWf_i'$. Daraus folgt:

$ann_{f_jUf_i'}(f_iS'f_j') \underset{Def.S'}{=\!=} ann_{f_jUf_i'}(ann_{f_iR'f_j}ann_{f_jUf_i'}(f_iSf_j)) =$

$= ann_{f_jUf_i'}ann_{f_iR'f_j'}(ann_{f_jUf_i'}(f_iSf_j)) = ann_{f_jUf_i'}(f_iSf_j) =$

$= f_jLf_i'$. D. h. es gilt:

(1.10) $ann_{f_jUf_i'}(f_iSf_j) = f_jLf_i' = ann_{f_jUf_i'}(f_iS'f_j')$.

Damit zeigt man analog, daß L S'- Rechtsuntermodul von U ist. Also existiert E := U/L als S- S'- Bimodul.

E ist injektiver Kogenerator für S und S':

Es sei $T := \sum_{i=1}^{k} f_iRf_i$. T ist Unterring von S. Vermöge ${}_TQ :=$

$:= \sum_{i=1}^{k} f_i U f_i'$ hat man einen injektiven Kogenerator für T gemäß Lemma 1.2 i). Mit ${}_S\mathrm{Hom}_T({}_TS_S, {}_TQ)$ hat man dann einen injektiven Kogenerator für S gemäß Lemma 0.6.

Sei $F: {}_S\mathrm{Hom}_T(S_S, Q) \longrightarrow {}_SE$ definiert wie folgt:

Ist $f \in \mathrm{Hom}_T(S,Q)$, so gilt: $(\sum_{i,j=1}^{k} f_i s f_j)f = \sum_{i,j=1}^{k} f_i(f_i s f_j)f$

Somit gilt $(f_i S f_j)f \subset f_i U f_i'$. Sei f' die Einschränkung von f auf $f_i S f_j$ als Quelle und $f_i U f_i'$ als Ziel. Dann ist f' $f_i R f_i$-lineare Abbildung. D. h., es gibt nach Lemma 1.2 vi) zu f' ein $f_j u_f f_i' \in f_j U f_i'$, so daß gilt: $(f_i s f_j)f = f_i s f_j f_j u_f f_i'$ für alle $f_i s f_j$ aus $f_i S f_j$. Damit gilt: $(\sum_{i,j=1}^{k} f_i s f_j)f =$

$= \sum_{i,j=1}^{k} f_i s f_j f_j u_f f_i'$. Sei $u_f := \sum_{i,j=1}^{k} f_j u_f f_i'$. Dann sei $(f)F :=$

$:= \sum_{i,j=1}^{k} f_i u_f f_i' + L = u_f + L$.

F ist S linearer Isomorphismus:

Angenommen für alle $s \in S$ gilt $(s)f = \sum_{i,j=1}^{k} f_i s f_j f_j v_f f_i'$. Dann gilt dies speziell für $s = f_i s f_j$ aus $f_i S f_j$ beliebig. Damit gilt: $f_i s f_j (f_j u_f f_i' - f_j v_f f_i') = 0$. Da dies für alle $f_i s f_j$ gilt, folgt: $f_j u_f f_i' - f_j v_f f_i' \in \mathrm{ann}_{f_j U f_i'}(f_i S f_j) = f_j L f_i'$. Da dies für alle i und j gilt, ergibt sich, daß (f)F eindeutig definiert ist. D. h.: F ist Abbildung.

F ist Gruppenhomomorphismus, denn $\sum_{i,j=1}^{k} (f_i s f_j)(f + g) =$

$= \sum_{i,j=1}^{k} (f_i s f_j)f + \sum_{p,q=1}^{k} (f_p s f_q)g = \sum_{i,j=1}^{k} f_i s f_i f_i u_f f_i' +$

$+ \sum_{p,q=1}^{k} f_p s f_q f_q u_g f_p' = \sum_{i,j=1}^{k} f_i s f_j (f_j u_f f_i' + f_j u_g f_i') =$

$= \sum_{i,j=1}^{k} f_i s f_j (f_j(u_f + u_g) f_i')$. D. h.: $(f + g)F = (u_f + u_g) + L =$

$= (u_f + L) + (u_g + L) = (f)F + (g)F.$

Ist $(f)F = 0$, dann ist $f_i u_f f'_j \in \mathrm{ann}_{f_i U f'_j}(f_j S f_i)$ für alle i und j. D. h.: $(\sum_{i,j=1}^{k} f_j s f_i)f = \sum_{i,j=1}^{k} f_j s f_i f_i u_f f'_j = 0$. Also ist F injektiv.

Ist $\sum_{i,j=1}^{k} f_i u f'_j + L$ vorgegeben, so sei $f: S \longrightarrow Q$ definiert durch $(s)f = (\sum_{i,j=1}^{k} f_j s f_i)f := \sum_{i,j=1}^{k} f_j s f_i f_i u f'_j$. f ist trivialerweise T- linear und es gilt $(f)F = \sum_{i,j=1}^{k} f_i u f'_j + L$. Somit ist F auch surjektiv.

Sei $r \in S$, so ist $(f_i s f_j)rf = (f_i s f_j(\sum_{p,q=1}^{k} f_p r f_q))f =$

$= \sum_{q=1}^{k} (f_i s f_j f_j r f_q)f = \sum_{q=1}^{k} f_i s f_j f_j r f_q f_q u_f f'_i = f_i s f_j$

$(\sum_{q=1}^{k} f_j r f_q f_q u_f f'_i)$. Also gilt: $(rf)F = \sum_{i,j=1}^{k} (\sum_{q=1}^{k} f_j r f_q f_q u_f f'_i) +$

$+ L = (\sum_{j,p=1}^{k} f_j r f_p)(\sum_{q,i=1}^{k} f_q u_f f'_i) + L = r(u_f + L) = r(f)F.$

Damit also ist F auch S- linear. D. h. F ist S- linearer Isomorphismus von ${}_S\mathrm{Hom}_T({}_T S_S, {}_T Q)$ auf ${}_S E$. Damit ist E injektiver Kogenerator für S.

Auf Grund von (1.10), d. h. auf Grund der Gleichheit von $\mathrm{ann}_{f_j U f'_i}(f'_i S' f'_j)$ und $\mathrm{ann}_{f_j U f'_i}(f_i S f_j)$ gilt die gleiche Argumentation auch für E als S'- Rechtsmodul. D. h.: E ist als S- Links- und als S'- Rechtsmodul injektiver Kogenerator.

Es verbleibt noch zu zeigen, daß $\mathrm{Hom}_S(-, {}_S E_{S'})$ und daß $\mathrm{Hom}_{S'}(-, {}_S E_{S'})$ einfache Moduln in ebensolche überführen.

Da S Basisring ist, folgt nach Lemma 1.1 a), daß für zwei primitive Idempotente e und f in S fSe im Radikal von S liegt. Daraus folgt, daß für alle $f_i \neq f_j$ $f_i S f_j \subseteq \mathrm{Rad}(S)$ ist.

Desweiteren gilt: $\mathrm{Soc}({}_S E f'_i) = (\mathrm{Soc}({}_{f_i R f_i} f_i U f'_i) + L)/L$:

Denn sei $0 \neq u \in Ef_i'$, dann gilt $u = \sum_{j=1}^{k} f_j u f_i' + L$. Ist für $j \neq i$ $f_j u f_i' \notin L$, so folgt daraus, daß $f_j u f_i' \notin \operatorname{ann}_{f_j U f_i'}(f_i S f_j)$ ist. Damit existiert ein $f_i s f_j$ aus $f_i S f_j$ mit $f_i s f_j f_j u f_i' \neq 0$. Da aber $f_i s f_j \in \operatorname{Rad}(S)$ ist, ist also $u \in \operatorname{ann}_{Ef_i'}(\operatorname{Rad}(S)) =$ $= \operatorname{Soc}({}_S Ef_i')$. Somit gilt: $\operatorname{Soc}({}_S Ef_i') \subset (f_i U f_i' + L)/L$.

Da für $f_i u f_i' \notin \operatorname{Soc}({}_{f_i R f_i} f_i U f_i')$ ein $f_i r f_i$ aus $\operatorname{Rad}(f_i R f_i)$ existiert mit $f_i r f_i f_i u f_i' \neq 0$ und da $\operatorname{Rad}(f_i R f_i) = \operatorname{Rad}(f_i S f_i) =$ $= f_i \operatorname{Rad}(S) f_i$ ist, folgt, daß $\operatorname{ann}_{Ef_i'}(\operatorname{Rad}(S)) = \operatorname{Soc}({}_S Ef_i') \subset$ $\subset (\operatorname{Soc}({}_{f_i R f_i} f_i U f_i') + L)/L$ ist.

Andererseits gilt für $f_i u f_i' \in \operatorname{Soc}({}_{f_i R f_i} f_i U f_i')$: $f_j s f_i f_i u f_i' \in$ $\in L$ für alle $f_j s f_i \in \operatorname{Rad}(S)$. Denn ist $i = j$, so ist $f_i s f_i \in$ $\in \operatorname{Rad}(f_i R f_i)$. Damit ist $f_i s f_i f_i u f_i' = 0 \in L$.

Ist $i \neq j$, und $f_j s f_i f_i u f_i' \notin f_j L f_i' = \operatorname{ann}_{f_j U f_i'}(f_i S f_j)$, so existiert ein $f_i r f_j \in S$: $f_i r f_j (f_j s f_i f_i u f_i') = (f_i r f_j f_j s f_i) f_i u f_i' \neq$ $\neq 0$. Da aber $f_i r f_j f_j s f_i \in \operatorname{Rad}(f_i R f_i) = \operatorname{Rad}(f_i S f_i)$ ist, folgt $(f_i r f_j f_j s f_i) f_i u f_i' = 0$. Widerspruch!

Somit ist $\operatorname{Rad}(S)((\operatorname{Soc}({}_{f_i R f_i} f_i U f_i') + L)/L) = 0$. D. h.: $\operatorname{Soc}({}_S Ef_i') \supset (\operatorname{Soc}({}_{f_i R f_i} f_i U f_i') + L)/L$. Insgesamt hat man also erhalten: $\operatorname{Soc}({}_S Ef_i') = (\operatorname{Soc}({}_{f_i R f_i} f_i U f_i') + L)/L$.

Analog erhält man, wenn man wieder (1.10), d. h. die Gleichheit $\operatorname{ann}_{f_j U f_i'}(f_i' S' f_j') = \operatorname{ann}_{f_j U f_i'}(f_i S f_j)$ ausnutzt: $\operatorname{Soc}(f_i E_{S'}) = (\operatorname{Soc}(f_i U f_i' \; f_i' R' f_i') + L)/L$.

Da $f_i U f_i'$ nach Lemma 1.2 ii) die Dualität zwischen $f_i R f_i$ und $f_i' R' f_i'$ vermittelt, erhält man gemäß (0.2), daß gilt: $\operatorname{Soc}({}_{f_i R f_i} f_i U f_i') = \operatorname{Soc}(f_i U f_i' \; f_i' R' f_i')$. Da $\operatorname{Soc}({}_S E) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Soc}({}_S Ef_i')$,

$\mathrm{Soc}(E_{S'}) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Soc}(f_j E_{S'})$ ist, folgt:

(1.11) $\mathrm{Soc}({}_S E) = \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{Soc}(f_i U f_i') + L)/L = \mathrm{Soc}(E_{S'})$

Die Summe ist dabei beidseits direkt.

Ist ${}_S M$ einfach, so gibt es ein primitives Idempotent e in S, so daß $M \cong Se/\mathrm{Rad}(S)e$ ist. O. B. d. A. gibt es genau ein p, so daß $e \in f_p S f_p$ ist, da S Basisring ist. M ist dann auch einfacher $f_p S f_p$-, d. h. einfacher $f_p R f_p$- Modul. Da M einfach ist, ist $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Soc}({}_S E)$ für jede S- lineare Abbildung g von M in E. Da $f_j M = 0$ ist für $j \neq p$, ist auch $f_j \mathrm{Im}(g) = 0$, d. h.: $\mathrm{Im}(g) \subset f_p \mathrm{Soc}({}_S E) = (\mathrm{Soc}(f_p U f_p') + L)/L = \mathrm{Soc}({}_S E f_p')$.

$(\mathrm{Soc}(f_p U f_p') + L)/L$ ist auch $f_p R f_p$- Modul. Da für $j \neq p$ $f_j s f_p \in \mathrm{Rad}(S)$ ist, ist $f_j s f_p M = 0$. Da $f_j s f_i M = 0$ für $i \neq p$ sowieso gilt, ist also jede S- lineare Abbildung von einem einfachen Untermodul von $Sf_p/\mathrm{Rad}(S)f_p$ in $\mathrm{Soc}({}_S E f_p')$ auch $f_p R f_p$- linear und umgekehrt. Da $Sf_p/\mathrm{Rad}(S)f_p$ als halbeinfacher Modul direkte Summe von einfachen Moduln ist, folgt insgesamt:

(1.12) Jede S- lineare Abbildung von $Sf_p/\mathrm{Rad}(S)f_p$ in $\mathrm{Soc}({}_S E f_p')$ ist auch $f_p R f_p$-linear und umgekehrt.

Also gilt: $\mathrm{Hom}_S(M, E_{S'})_{S'} \cong \mathrm{Hom}_S(M, (\mathrm{Soc}(f_p U f_p') + L)/L_{S'})_{S'} \cong$ $\cong \mathrm{Hom}_{f_p R f_p}(M, (\mathrm{Soc}(f_p U f_p') + L)/L_{S'})_{S'}$. Da $f_p R f_p$ zu $f_p' R' f_p'$ vermöge $f_p U f_p'$ dual ist, ist $\mathrm{Hom}_{f_p R f_p}(M, f_p U f_p')$ einfacher $f_p' R' f_p'$- Rechtsmodul. Ferner ist als $f_p' R' f_p'$- Rechtsmodul $\mathrm{Hom}_{f_p R f_p}(M, f_p U f_p') \cong \mathrm{Hom}_{f_p R f_p}(M, \mathrm{Soc}(f_p U f_p')) \cong$ $\cong \mathrm{Hom}_{f_p R f_p}(M, (\mathrm{Soc}(f_p U f_p') + L)/L)$. Damit ist der letzte dieser Moduln auch einfacher $f_p' R' f_p'$- Modul. Da E Kogenerator ist, ist $\mathrm{Hom}_S(M,E)_{S'}$ ungleich dem Nullmodul, da ferner $f_p' R' f_p'$ S' ist, muß dieser Modul auch einfacher S'- Modul sein, d. h.: $\mathrm{Hom}_S(M, E_{S'})$ ist einfacher S'- Modul für alle ein-

fachen S Moduln M. Also überführt $\mathrm{Hom}_S(-,{}_SE_{S'})$ einfache Moduln in ebensolche. Da für $\mathrm{Hom}_{S'}(-,{}_SE)$ trivialerweise die gleichen Überlegungen gelten, folgt, daß S zu S' vermöge ${}_SE_{S'}$ dual ist.

Da $Sf_i/\mathrm{Rad}(S)f_i$ zu f_iRf_i/f_iJf_i als f_iRf_i- Modul isomorph ist und da nach Lemma 1.2 ii) f_iRf_i/f_iJf_i als f_iRf_i- Modul isomorph zu $\mathrm{Soc}(f_iUf_i')$ ist, folgt: $Sf_i/\mathrm{Rad}(S)f_i \cong$ $\cong f_iRf_i/f_iJf_i \cong \mathrm{Soc}(f_iUf_i') \cong (\mathrm{Soc}(f_iUf_i') + L)/L$. Jede dieser Isomorphien ist f_iRf_i- linear. Nach (1.12) gibt es somit eine S- lineare Isomorphie zwischen $Sf_i/\mathrm{Rad}(S)f_i$ und $\mathrm{Soc}(Ef_i')$. Damit ist $E(Sf_i/\mathrm{Rad}(S)f_i)$ zu Ef_i' isomorph.

b) Ist I ein zweiseitiges Ideal in R, so ist $V :=$
$:= \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{ann}_{f_jUf_i'}(f_iIf_j)$ zweiseitiger Untermodul von U:

Denn sei $f_iuf_j' \in \mathrm{ann}_{f_iUf_j'}(f_jIf_i)$, $f_prf_i \in f_pRf_i$. Gilt dann $f_prf_if_iuf_j' \notin \mathrm{ann}_{f_pUf_j'}(f_jIf_p)$, so gibt es ein $f_jsf_p \in f_jIf_p$, so daß $0 \neq f_jsf_p(f_prf_if_iuf_j') = (f_jsf_pf_prf_i)f_iuf_j'$ ist. Da I Ideal in R ist, folgt $f_jrf_pf_psf_i \in f_jIf_i$. Somit ist $f_iuf_j' \notin$ $\notin \mathrm{ann}_{f_iUf_j'}(f_jIf_i)$. Widerspruch! Damit ist V R- Linksuntermodul von U.

Aus Lemma 1.2 iv) erhält man $\mathrm{ann}_{f_jUf_i'}\mathrm{ann}_{f_iR'f_j'}(f_jWf_i') =$
$= f_jWf_i'$. D. h., man erhält, wenn man beachtet, daß $f_iI'f_j' =$
$= \mathrm{ann}_{f_iR'f_j'}\mathrm{ann}_{f_jUf_i'}(f_iIf_j)$ ist: $\mathrm{ann}_{f_jUf_i'}(f_iI'f_j') =$
$= \mathrm{ann}_{f_jUf_i'}(\mathrm{ann}_{f_iR'f_j'}\mathrm{ann}_{f_jUf_i'}(f_iIf_j)) =$
$= \mathrm{ann}_{f_jUf_i'}\mathrm{ann}_{f_iR'f_j'}(\mathrm{ann}_{f_jUf_i'}(f_iIf_j)) =$
$= \mathrm{ann}_{f_jUf_i'}(f_iIf_j)$. Dies entspricht (1.10). Da nach (1.9) I' zweiseitiges Ideal in R' ist, läßt sich mit derselben Argumentation wie für die R- Linksstruktur zeigen: V ist R'- Rechts-

untermodul von U.

Somit ist $F:I \longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{ann}_{f_jUf_i'}(f_iIf_j)$ eine Abbildung vom Verband der zweiseitigen Ideale von R in den Verband der zweiseitigen Untermoduln von U. Sind I und H Ideale in R und ist $I \neq H$, so existieren f_i und f_j: $f_iIf_j \neq f_iHf_j$. Da nach Lemma 1.2 v) $\operatorname{ann}_{f_jUf_i'}(-)$ ein Verbandsantiisomorphismus ist, folgt: $\operatorname{ann}_{f_jUf_i'}(f_iIf_j) \neq \operatorname{ann}_{f_jUf_i'}(f_iHf_j)$. Damit ist $F(I) \neq F(H)$, also ist F injektiv. Da R artinsch ist, ist der Verband der zweiseitigen Ideale von R endlich. Da es eine Verbandsantiisomorphie zwischen diesem Verband und dem Verband der zweiseitigen Untermoduln von U gibt, folgt aus F injektiv also: F ist bijektiv. Ist $I \subset H$, so folgt wieder nach Lemma 1.2 v) $\operatorname{ann}_{f_jUf_i'}(f_iHf_j) \subset \operatorname{ann}_{f_jUf_i'}(f_iIf_j)$ für alle i und j. D. h.: $F(H) \subset F(I)$. Damit ist gezeigt, daß F Verbandsantiisomorphismus ist.

Nach Lemma 1.2 iv) gilt: $\operatorname{ann}_{f_iUf_j'}\operatorname{ann}_{f_jRf_i}(f_iVf_j') = f_iVf_j'$ und $\operatorname{ann}_{f_iRf_j}\operatorname{ann}_{f_jUf_i'}(f_iIf_j) = f_iIf_j$. Somit ist $G:V \longmapsto \longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{ann}_{f_jRf_i}(f_iVf_j')$ der zu F inverse Verbandsantiisomorphismus.

Da F und $\operatorname{ann}_U(-)$ Verbandsantiisomorphismen sind, reicht es, für alle I zu zeigen, daß $F(I) \supset \operatorname{ann}_U(I) =: W$ ist, wenn man zeigen will, daß $F(I) = \operatorname{ann}_U(I)$ für alle I ist. Aus $I \cdot W = 0$ folgt: $f_iIf_jf_jWf_i' = 0$. Damit gilt: $f_jWf_i' \subset \operatorname{ann}_{f_jUf_i'}(f_iIf_j)$ für alle i, j. Daraus folgt aber bereits $\operatorname{ann}_U(I) \subset F(I)$.

Nach (1.1) ist R/I vermöge $\operatorname{ann}_U(I)$ zu R'/I' dual, wenn $H = \operatorname{ann}_R,\operatorname{ann}_U(I)$ ist. Somit verbleibt noch zu zeigen: $H = I'$.

Trivialerweise sind $F':I' \longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{ann}_{f_jUf_i'}(f_i'I'f_j')$ und

$G': V \longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{ann}_{f_j'R'f_i'}(f_i V f_j')$ analog zu F und G zueinander inverse Verbandsantiisomorphismen. Ferner gilt: $\mathrm{ann}_U(I') = F'(I')$. Da $\mathrm{ann}_{R'}(-)$ zu $\mathrm{ann}_U(-)$ inverser Verbandsantiisomorphismus ist, folgt: $\mathrm{ann}_{R'}(I') = G'(I')$. Damit gilt: $H = \mathrm{ann}_{R'}\mathrm{ann}_U(I) = G'F(I) = G'\left(\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{ann}_{f_j U f_i'}(f_i I f_j)\right) = \sum_{p,q=1}^{n} \mathrm{ann}_{f_p'R'f_q'}\mathrm{ann}_{f_q U f_p'}(f_p I f_q) = I'$. Somit ist R/I zu R'/I' vermöge $V = \mathrm{ann}_U(I)$ dual.

$(R/I)(f_i+I)/\mathrm{Rad}(R/I)(f_i+I) \cong (R/I)(f_i+I)/((J+I)/I)(f_i+I) \cong$ $\cong Rf_i/If_i/(J+I)f_i/If_i \cong Rf_i/(J+I)f_i$ erhält man gemäß (1.4), [1, 7.10. Proposition] und dem zweiten Isomorphiesatz.

Da V ein Untermodul von U ist, folgt: $\mathrm{Soc}({}_RV) \subset \mathrm{Soc}({}_RU)$ und damit $\mathrm{Soc}({}_RVf_i') \subset \mathrm{Soc}({}_RUf_i') \cong Rf_i/Jf_i$. Da $\mathrm{Soc}({}_RVf_i')$ auch R/I- Modul ist, folgt: $\mathrm{Soc}({}_RVf_i') = \mathrm{Soc}({}_{R/I}Vf_i')$ läßt sich in $Rf_i/(J+I)f_i$ einbetten. Da V injektiver Kogenerator ist, enthält $\mathrm{Soc}({}_{R/I}V)$ zu jedem einfachen R/I- Modul einen isomorphen Untermodul. Da R/I nach Lemma 1.1 b) Basisring ist, folgt damit: Die Einbettung von $\mathrm{Soc}({}_{R/I}Vf_i')$ in $Rf_i/(J+I)f_i$ ist auch surjektiv für alle i. D. h.: $E(Rf_i/(I+J)f_i) \cong$ $\cong E((R/I)(f_i+I)/\mathrm{Rad}(R/I)(f_i+I)) \cong V(f_i'+I)$.

q.e.d.

Bemerkung: Die Notwendigkeit, bei R' die gleiche Anzahl von orthogonalen Idempotenten vorauszusetzen, ergibt sich aus folgender Überlegung:

Ist R der Ring der zweireihigen Matrizen über einem Schiefkörper K, so ist R zu K dual. Aber für den Unterring der oberen Dreiecksmatrizen $\begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ von R gibt es keinen analogen Unterring von K, denn in K sind 0 und 1 die einzigen Idempotente.

Korollar 1

Sei S linksartinscher zu S' vermöge ${}_SU_{S'}$ dualer Ring. Sei R der n- reihige Matrizenring über S, R' der n- reihige Matrizenring über S'. Sei T Unterring von R und enthalte T die Hauptdiagonale von R, d. h.: $E_{ii}RE_{ii} \subset T$ für alle Elementarmatrizen E_{ii}. Ist ferner I zweiseitiges Ideal in T, so gilt:

$T = \sum_{i,j=1}^{n} T_{ij}E_{ij}$, $I = \sum_{i,j=1}^{n} I_{ij}E_{ij}$ mit T_{ij} und I_{ij} zweiseitigen Idealen in S, E_{ij} Elementarmatrizen.

Setzt man $U'_{ij} := \operatorname{ann}_U(I_{ji})$, $L_{ij} := \operatorname{ann}_U(T_{ji})$, $T'_{ij} := \operatorname{ann}_{S'}(L_{ji})$, $I'_{ij} := \operatorname{ann}_{S'}(U'_{ji})$ und setzt man ferner $U' := \sum_{i,j=1}^{n} U'_{ij}E_{ij}$, $L := \sum_{i,j=1}^{n} L_{ij}E_{ij}$, $T' := \sum_{i,j=1}^{n} T'_{ij}E_{ij}$, $I' := \sum_{i,j=1}^{n} I'_{ij}E_{ij}$, so sind L und U' Biuntermoduln des R- R'-Moduls V der n- reihigen Matrizen über U. Ferner ist T' Unterring von R' und I' zweiseitiges Ideal in T'. Außerdem ist T/I zu T'/I' vermöge U'/L Morita- dual.

Beweis:

Da E_{ii}, E_{jj} aus T sind, folgt, daß $E_{ii}TE_{jj} \subset T$ Untergruppe von T ist. D. h., es existiert eine Untergruppe T_{ij} von S, so daß $T_{ij}E_{ij} = E_{ii}TE_{jj}$ ist. Da SE_{ii}, $SE_{jj} \subset T$ ist, folgt: $(SE_{ii})T(SE_{jj}) = SE_{ii}TE_{ij}SE_{jj} \subset (STS)E_{ij}$. Also ist T_{ij} sogar zweiseitiges Ideal in S.

R erfüllt mit R' als dualem Ring und V als injektivem Kogenerator die Voraussetzungen von Satz 1.3 a). D. h.: T ist zu $T'' = \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{ann}_{E_{ii}R'E_{jj}} \operatorname{ann}_{E_{jj}VE_{ii}}(E_{ii}TE_{jj})$ vermöge V/L' dual. Dabei ist $L' = \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{ann}_{E_{jj}VE_{ii}}(E_{ii}TE_{jj})$. Für die Annulatoren gilt:

$$\operatorname{ann}_{E_{jj}VE_{ii}}(E_{ii}TE_{jj}) = \{ u \in E_{jj}VE_{ii} \mid E_{ii}TE_{jj}u = 0 \} =$$
$$= \{ uE_{ji} \in UE_{ji} \mid T_{ij}E_{ij}uE_{ji} = 0 \} = \{ u \in U \mid T_{ij}u = 0 \}E_{ji} =$$
$$= \operatorname{ann}_U(T_{ij})E_{ji}. \text{ Analog folgt } \operatorname{ann}_{E_{ii}R'E_{jj}} \operatorname{ann}_{E_{jj}VE_{ii}}(E_{ii}TE_{jj}) =$$

$= \mathrm{ann}_S,\mathrm{ann}_U(T_{ij})E_{ij}$. D. h.: T" = T' und L = L'.

T erfüllt mit T' als dualem Ring und V/L als injektivem Kogenerator die Voraussetzungen von Satz 1.3 b). Damit ist T/I zu T'/I" vermöge $U'' = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{ann}_{E_{jj}(V/L)E_{ii}}(E_{ii}IE_{jj})$ dual.

I" ist dabei $\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{ann}_{E_{ii}T'E_{jj}} \mathrm{ann}_{E_{jj}(V/L)E_{ii}}(E_{ii}IE_{jj})$.

Analog zu T gilt auch für I, daß $I = \sum_{i,j=1}^{n} I_{ij}E_{ij}$ ist. Da $SE_{ii} \subset T$ ist für alle i, ist I_{ij} zweiseitiges Ideal in S. Ferner gilt: $E_{jj}(V/L)E_{ii} = (E_{jj}VE_{ii} + L)/L = (UE_{ji} + L)/L$. Also erhält man:

$\mathrm{ann}_{E_{jj}(V/L)E_{ii}}(E_{ii}IE_{jj}) = \mathrm{ann}_{(UE_{ji}+L)/L}(I_{ij}E_{ij}) =$

$= \{ uE_{ji} + L \in (UE_{ji} + L)/L \mid I_{ij}E_{ij}(uE_{ji} + L) = 0 + L \} =$

$= (\{ u \in U \mid I_{ij}uE_{ii} + L = L \}E_{ji} + L)/L = (\mathrm{ann}_U(I_{ij})E_{ji} + L)/L,$

denn $E_{ii}LE_{ii} = 0$. Da T_{ij} I_{ij} umfaßt, folgt auf Grund der Verbandsantiisomorphie: $L_{ji} = \mathrm{ann}_U(T_{ij}) \subset \mathrm{ann}_U(I_{ij}) = U'_{ji}$. Damit ist $(U' + L)/L = U'/L = U"/L$.

Weiterhin gilt: $\mathrm{ann}_{E_{kk}T'E_{pp}} \mathrm{ann}_{E_{pp}(V/L)E_{kk}}(E_{kk}IE_{pp}) =$

$= \mathrm{ann}_{T'_{kp}E_{kp}} ((\mathrm{ann}_U(I_{kp})E_{pk} + L)/L) =$

$= \{ sE_{kp} \in T'_{kp}E_{kp} \mid (\mathrm{ann}_U(I_{kp})E_{pk} + L)\cdot sE_{kp} = 0 + L \} =$

$= \{ s \in T'_{kp} \mid \mathrm{ann}_U(I_{kp})s\cdot E_{kk} + L = L \}E_{kp} = \mathrm{ann}_{T'_{kp}} \mathrm{ann}_U(I_{kp})E_{kp},$

da ja $E_{kk}LE_{kk} = 0$ ist.

Da $S \supset T_{kp} \supset I_{kp}$ gilt, folgt auf Grund der Verbandsisomorphie: $I'_{kp} = \mathrm{ann}_S,\mathrm{ann}_U(I_{kp}) \subset \mathrm{ann}_S,\mathrm{ann}_U(T_{kp}) = T'_{kp} \subset S' =$

$= \mathrm{ann}_S,\mathrm{ann}_U(S)$. Damit gilt: Ist s aus S' mit $\mathrm{ann}_U(I_{kp})s = 0$, so ist $s \in T'_{kp}$. Also gilt: $\mathrm{ann}_S,\mathrm{ann}_U(I_{kp}) = \mathrm{ann}_{T'_{kp}} \mathrm{ann}_U(I_{kp})$.

D. h.: I' = I".

q.e.d.

Man hat somit bei den Matrizenringen eine Art "komponentenweise Dualität" der, die Hauptdiagonale erhaltenden Unter-

ringe und der Faktorringe. Speziell ist ein die Hauptdiagonale erhaltender tic tac toe- Unterring (Definition s. (0.8)) eines Matrizenringes über einem selbstdualen Ring selbstdual.

Korollar 2

Jeder die Matrizenhauptdiagonale erhaltende Unterring eines Ringes mit guter Dualität ist wieder ein Ring mit guter Dualität.

Beweis:

Hat R eine gute Dualität, so ist R zu einem Ring S vermöge eines R- S- Bimoduls U dual und es gibt einen Isomorphismus $F:R \longrightarrow S$, so daß $F(I) = ann_S ann_U(I)$ für alle zweiseitigen Ideale I in R gilt. Da S vermöge $s \longmapsto \rho_s$ mit $\rho_s(u) := us$ zum Endomorphismenring $End_R(U)$ isomorph ist ([26, Theorem 1.1 und Theorem 2.4]), kann man o. B. d. A. $S = End_R(U)$ setzen.

Vermöge F operiert dann R so von rechts auf U, daß gilt:

$ann_R ann_U(I) = \{ r \in R \mid ann_U(I)F(r) = 0 \} =$

$= \{ r \in R \mid F(r) \in ann_S ann_U(I) \} = F^{-1}(ann_S ann_U(I)) = I.$

Mit Hilfe von Korollar 1 erhält man jetzt das gewünschte Ergebnis.

q.e.d.

Man kann Korollar 2 auch wie folgt abschwächen:
Ist R Ring mit guter Dualität, so ist jeder Faktorring eines jeden die Matrizenhauptdiagonale erhaltenden Unterringes eines jeden Matrizenringes über R selbstdual.

Speziell ist jeder tic tac toe- Ring über einem Ring mit guter Dualität wieder von guter Dualität.

Für Ringe mit guter Dualität kann man ferner zeigen:

Korollar 3

Ist R Ring mit guter Dualität, so ist jeder HDE- Unterring von R wieder Ring mit guter Dualität. Gleiches gilt auch für jeden Faktorring.

Beweis:

Sei S HDE- Unterring von R. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine vollständige Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente von R.

Ist $e_i I e_j$ $e_i R e_i$- $e_j R e_j$- Biuntermodul von $e_i R e_j$, so ist $Re_i I e_j R =: H$ das von $e_i I e_j$ in R erzeugte zweiseitiges Ideal.

Es folgt direkt aus den Bimoduleigenschaften, daß $e_iIe_j =$ $= e_iRe_ie_iIe_je_jRe_j = e_i(Re_iIe_jR)e_j = e_iHe_j$ ist.

Sei U der die Dualität von R vermittelnde injektive Kogenerator, so gilt nach (0.4): $H = ann_R ann_U(H)$. Da ein Ring mit guter Dualität nach Lemma 0.9 eine schwachsymmetrische Dualität besitzt, folgt nach Lemma 0.8: $Ue_i \cong E(Re_i/Je_i)$. Damit gilt $ann_{e_iRe_j} ann_{e_jUe_i}(e_iHe_j) = e_i(ann_R ann_U(H))e_j =$ $= e_iHe_j$ nach Satz 1.3 b). D. h.: $ann_{e_iRe_j} ann_{e_jUe_i}(e_iIe_j) =$ $= e_iIe_j$ für jeden Biuntermodul e_iIe_j von e_iRe_j.

Da $e_iRe_i \subset S$ ist für alle i, folgt: $e_iRe_ie_iSe_je_jRe_j \subset e_iSe_j$. D. h.: e_iSe_j ist Biuntermodul von e_iRe_j. Damit gilt also: $ann_{e_iRe_j} ann_{e_jUe_i}(e_iSe_j) = e_iSe_j$. Dies bedeutet aber nach Satz 1.3 a), daß S selbstdual ist. Es ist noch zu zeigen, daß dies eine gute Dualität ist.

Sei $L := \sum_{i,j=1}^{n} ann_{e_jUe_i}(e_iSe_j)$, so ist U/L =: E der Kogenerator, der die Dualität von S vermittelt.

Sei I zweiseitiges Ideal in S. e_iIe_j ist trivialerweise e_iSe_i- e_jSe_j- Biuntermodul von e_iSe_j und damit auch e_iRe_j- e_jRe_j- Untermodul von e_iRe_j. Nach (1.1) ist S/I vermöge $ann_E(I)$ zu $S/ann_S ann_E(I)$ dual. Nach Satz 1.3 b) folgt:

$ann_S ann_E(I) = \sum_{i,j=1}^{n} ann_{e_iSe_j} ann_{e_jEe_i}(e_iIe_j)$. Desweiteren gilt:

$ann_{e_jEe_i}(e_iIe_j) = \{e_jue_i + L \in U/L \mid e_iIe_j(e_jue_i + L) = 0 + L\} =$

$= (\{e_jue_i \in e_jUe_i \mid e_iIe_j(e_jue_i + L) = L\} + L)/L$. Nach Lemma 1.2 ii) ist e_iUe_i injektiver Kogenerator für e_iRe_i. Also ist $e_iLe_i = ann_{e_iUe_i}(e_iRe_i) = 0$. Somit ist der letzte Term gleich $(ann_{e_jUe_i}(e_iIe_j) + L)/L$. Da $e_iIe_j \subset e_iSe_j$ ist, folgt, daß $ann_{e_jUe_i}(e_iIe_j) \supset ann_{e_jUe_i}(e_iSe_j)$ ist. Damit ist $L \subset V :=$

$:= \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j)$, d. h.: $V/L = \mathrm{ann}_E(I)$ nach Satz 1.3 b).

Es gilt ferner: $\mathrm{ann}_{e_iSe_j}((\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j) + L)/L) =$

$= \{ e_ise_j \in e_iSe_j \mid \mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j)e_ise_j + L = 0 + L \} =$

$= \mathrm{ann}_{e_iSe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j)$, denn $e_tLe_t = 0$ für alle t.

Da $e_iRe_j \supset e_iSe_j \supset e_iIe_j$ ist, folgt auf Grund der Verbandsisomorphie der zweiseitigen Untermoduln von e_iRe_j: $\mathrm{ann}_{e_iRe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j) \subset \mathrm{ann}_{e_iRe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iSe_j) = e_iSe_j \subset$ $\subset e_iRe_j$. Damit gilt: Ist $e_ire_j \in e_iRe_j$ mit $\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j) \cdot e_ire_j = 0$, so ist $e_ire_j \in e_iSe_j$. Damit gilt für alle i, j: $\mathrm{ann}_{e_iRe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j) \subset \mathrm{ann}_{e_iSe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j)$. Die umgekehrte Inklusion ist evident. D. h.: $\mathrm{ann}_{e_iSe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j) =$ $= \mathrm{ann}_{e_iRe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j)$. Aber der letzte Term ist gleich e_iIe_j. Damit ist S/I vermöge $\mathrm{ann}_E(I)$ zu S/I dual und es gilt $\mathrm{ann}_S\mathrm{ann}_E(I) = I$ für jedes zweiseitige Ideal in S. Also hat S eine gute Dualität.

Ist R/I Faktorring von R, ist H/I Ideal in R/I, so gilt: $I \subset H$ folgt $\mathrm{ann}_U(I) \supset \mathrm{ann}_U(H)$. Daraus folgt: $\mathrm{ann}_U(H) = \mathrm{ann}_{\mathrm{ann}_U(I)}(H) = \mathrm{ann}_{\mathrm{ann}_U(I)}(H/I)$. Da $\mathrm{ann}_R\mathrm{ann}_U(H) \supset \mathrm{ann}_R\mathrm{ann}_U(I) =$ $= I$ ist, folgt: $\mathrm{ann}_{R/I}\mathrm{ann}_{\mathrm{ann}_U(I)}(H/I) = \mathrm{ann}_{R/I}\mathrm{ann}_U(H) =$ $= (\mathrm{ann}_R\mathrm{ann}_U(H))/I = H/I$. Also hat auch R/I eine gute Dualität.

q.e.d.

Bemerkung: Daß $R/I/H/I$ selbstdual ist, folgt bereits aus dem zweiten Isomorphiesatz.

Korollar 4

Ist R Ring mit guter Dualität, ist S Morita- äquivalent zu R, so ist auch S Ring mit guter Dualität.

Beweis:

Da S Morita- äquivalent zu R ist, folgt, daß es eine natürliche Zahl m gibt, ein Idempotent e aus M(m,R), dem m- reihigen Matrizenring über R, so daß $S \cong eM(m,R)e$ ist ([1, 22.7. Corollary]). Sei 1 das Einselement des Matrizenringes. Da auch (1 - e) Idempotent ist, folgt, daß $(1 - e)M(m,R)(1 - e) + eM(m,R)e =: T$ Unterring von R ist. Für T gilt: Ist f primitives Idempotent in M(m,R), so ist $fM(m,R)f \subset T$. D. h.: T ist HDE- Unterring von M(m,R).

Nach Korollar 2 hat M(m,R) eine gute Dualität. Mit Korollar 3 folgt dann, daß auch T wieder ein Ring mit guter Dualität ist. Damit folgt, wenn man wieder Korollar 3 anwendet, daß $T/(1 - e)M(m,R)(1 - e)$ auch ein Ring mit guter Dualität ist, denn $(1 - e)M(m,R)(1 - e)$ ist trivialerweise Ideal in T. Aber $T/(1 - e)M(m,R)(1 - e)$ ist isomorph zu S. Somit hat S eine gute Dualität.

q.e.d.

Da für einen Ring R, der eine schwachsymmetrische Selbstdualität hat, nach Lemma 0.9 folgt, daß R eine gute Dualität hat, wenn alle primitiven Links- (oder Rechts-) ideale distributiv sind, folgt aus Korollar 3:

Korollar 5

Ist R schwachsymmetrisch selbstdualer Ring und sind alle primitiven Links- (oder Rechts-) ideale distributiv, so ist jeder HDE- Unterring von R Ring mit guter Dualität.

Für einen schwachsymmetrisch selbstdualen Ring stellt $\mathrm{ann}_{e_iRe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(-)$ nach Lemma 1.2 v) einen Verbandsautomorphismus dar zwischen den Biuntermodulen von e_iRe_j. Wenn die Untermoduln von e_iRe_j linear geordnet sind, folgt also, daß $\mathrm{ann}_{e_iRe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j) = e_iIe_j$ für alle Biuntermoduln e_iIe_j von e_iRe_j ist. Dies gilt speziell für die Ringe, die die Voraussetzungen von Korollar 5 erfüllen. Denn aus Re_j distributiv folgt nach (0.6), daß e_iRe_j einreihiger e_iRe_i- e_jRe_j- Bimodul ist. Man hat also:

Korollar 6

Ist R schwachsymmetrisch selbstdualer Ring, und ist der Untermodulverband von e_iRe_j linear geordnet für alle primitiven Idempotente e_i, e_j aus R, so hat R eine gute Dualität.

Beweis:

Für ein zweiseitiges Ideal I in R gilt nach Satz 1.3 b): $\mathrm{ann}_R\mathrm{ann}_U(I) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{ann}_{e_iRe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j)$. Auf Grund der linearen Anordnung der Biuntermoduln von e_iRe_j gilt: $e_iIe_j = \mathrm{ann}_{e_iRe_j}\mathrm{ann}_{e_jUe_i}(e_iIe_j)$. Damit ist $\mathrm{ann}_R\mathrm{ann}_U(I) = I$. D. h.: R ist Ring von guter Dualität.

q.e.d.

Beispiel: Es gibt Ringe, die die Voraussetzungen von Korollar 6 erfüllen, ohne daß e_iR oder Re_i für alle i distributiv ist:

Sei $R := \begin{pmatrix} (\mathbb{Q}[\sqrt[2]{2}])[x]/\langle x^k\rangle & (\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}])[x]/\langle x^k\rangle \\ 0 & (\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}])[x]/\langle x^k\rangle \end{pmatrix}$.

Es ist evident, daß R selbstdual ist, da R Artinalgebra über seinem Zentrum $\mathbb{Q}[x]/\langle x^k\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist. Damit hat R nach (0.5) eine gute Dualität. Nach Lemma 0.9 hat R dann auch eine schwachsymmetrische Selbstdualität.

Trivialerweise sind $(\mathbb{Q}[\sqrt[2]{2}])[x]/\langle x^k\rangle \cdot \sqrt[6]{2}$ und auch $(\mathbb{Q}[\sqrt[2]{2}])[x]/\langle x^k\rangle \cdot 1$ Linksuntermoduln von $(\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}])[x]/\langle x^k\rangle$. Für diese Untermoduln gilt, daß keiner von beiden im anderen enthalten ist. D. h.: Nicht alle primitiven Linksideale sind distributiv. Gleiche Überlegungen gelten für die Rechtsuntermoduln $(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}])[x]/\langle x^k\rangle \cdot \sqrt[6]{2}$ und $(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}])[x]/\langle x^k\rangle \cdot 1$ von $(\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}])[x]/\langle x^k\rangle$. Damit sind auch nicht alle primmitiven Rechtsideale in R distributiv.

Da $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}][\sqrt[2]{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}]$ ist, folgt, daß der Biuntermodulverband von $(\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}])[X]/\langle X^k\rangle$ linear geordnet ist:

Ist U Biuntermodul von $(\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}])[X]/\langle X^k\rangle$, so gibt es zu U eine Zahl $0 \leq m \leq k$, so daß für alle Elemente aus U gilt, daß die Koeffizienten von $\overline{X}^0$ bis $\overline{X}^{m-1}$ immer gleich Null sind und daß es ein Element $a \in U$ gibt, $a = \sum_{j=1}^{k-1} a_j \overline{X}^j$, mit $a_m \neq 0$.

$(\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}])[X]/\langle X^k\rangle$ ist ein lokaler einreihiger Ring (s. z. B. [32, Theorem 4]). Die einzigen echten Ideale in diesem Ring sind die von $\overline{X}^p$ für $1 \leq p \leq k$ erzeugten Ideale. D. h.: Sind $b_m, \ldots, b_{k-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}]$ beliebig, so gibt es $c_0, \ldots, c_{k-1}$ aus $\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}]$, $c_p := 0$ für $p > k-m-1$, die anderen erhält man induktiv als $c_0 := a_m^{-1} \cdot b_m$, $c_t := a_m^{-1}\left(b_{m+t} - \sum_{p=1}^{t} a_{m+p} c_{t-m-p} \right)$, so daß gilt: $\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i \overline{X}^i \right)\left(\sum_{j=1}^{k-1} c_j \overline{X}^j \right) = \sum_{p=m}^{k-1} b_p \overline{X}^p$. Für c_t gibt es q_{1t} und $q_{2t} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ mit $c_t = q_{1t} + \sqrt[2]{2} \cdot q_{2t}$. Also ist $a_i \overline{X}^i \cdot c_t \overline{X}^t = a_i \overline{X}^i \cdot q_{1t} \overline{X}^t + a_i \overline{X}^i \cdot q_{2t} \sqrt[2]{2} \overline{X}^t$. Somit folgt: $\sum_{i=m}^{k-1} b_i \overline{X}^i = \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i \overline{X}^i\right)\left(\sum_{j=1}^{k-1} c_j \overline{X}^j\right) = \sqrt[2]{2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i \overline{X}^i\right)\left(\sum_{j=1}^{k-1} q_{2j} \overline{X}^j\right) +$

$+ \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i \overline{X}^i \right)\left(\sum_{j=1}^{k-1} q_{1j} \overline{X}^j \right)$. Daraus folgt, daß für U gilt:

$U = \overline{X}^m(\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}])[X]/\langle X^k\rangle$. Damit sind alle Biuntermoduln von dieser Gestalt, d. h.: Die Biuntermoduln von $(\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}])[X]/\langle X^k\rangle$ sind linear geordnet.

K a p i t e l 2

V e r a l l g e m e i n e r t e M a t r i z e n r i n g e

Für Matrizenringe gilt, daß sie genau dann Morita- selbstdual sind, wenn der zu Grunde liegende Ring Morita- selbstdual ist, denn Matrizenringe sind ja Morita- äquivalent zum Ausgangsring.

Für tic tac toe- Ringe wurde von Haack ([17]) gezeigt, daß sie selbstdual sind, wenn der zu Grunde liegende Ring Schiefkörper ist. Darüberhinaus gilt auf Grund der Bemerkung nach Korollar 1 zu Satz 1.3, daß jeder tic tac toe- Matrizenring über einem selbstdualen Ring wieder selbstdual ist (s. auch [4]). Aber Satz 1.3 versagt bereits bei folgendem einfachen Beispiel ([15, Beispiel nach Theorem 2]):

Sei D Divisionsring, f Ringautomorphismus von D. Sei f ungleich der Identität auf dem Zentrum von D. Dann sei R der Ring der Matrizen von der Form:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & x & m \\ & b & y & z \\ & & c & 0 \\ 0 & & & d \end{pmatrix}$$

Dabei seien a, b, c, d, x, y, z aus D. m sei Element von ${}_D M_D$, mit ${}_D M = {}_D D$. Für die D- Rechtsmodulstruktur von M gelte für $m \in M$ und $d \in D$: $m \cdot d := mf(d)$. Dieser so konstruierte Ring R ist nicht tic tac toe- Ring über D.

Um von solchen Ringen die Selbstdualität nachweisen zu können, seien im folgenden verallgemeinerte Matrizenringe über lokalen QF- Ringen betrachtet. Von diesen hier betrachteten "verallgemeinerten Matrizenringen" werden folgende Eigenschaften verlangt (Es sei R ein solcher verallgemeinerter Matrizenring):

Es soll zu R ein lokaler QF- Ring D existieren, so daß auf der Hauptdiagonalen einer jeden Matrix aus R nur Elemente aus D stehen. Für $i \neq j$ sollen an der (i,j)- ten Stelle Elemente aus einem D- D- Bimodul R_{ij} stehen. Für diese Bimo-

duln R_{ij} wird verlangt, daß sie endliche direkte Summe von D- D- Bimoduln R_{ij}^k sind. Diese R_{ij}^k sollen als Links- und als Rechtsmodul über D isomorph zu D sein. Damit sind die R_{ij}^k sowohl als Linksmodul als auch als Rechtsmodul lokal und treu.

Sei zuerst einmal bemerkt, daß für einen Bimodul ${}_DM_D$, der beidseits lokaler Modul über einem lokalen artinschen Ring D ist, jedes Element, das einseitig erzeugend ist, auch beidseits erzeugend ist: Sei y erzeugend in M_D, aber nicht erzeugend in ${}_DM$: Ist x erzeugend in ${}_DM$, so existiert ein a aus D: ax = y. Da ax nicht erzeugend in ${}_DM$ ist, ist a nicht invertierbar. Da D lokaler Ring ist, ist nach [11, 18.10A Definition and Proposition] $a \in Rad(D)$. Da D artinsch ist, ist Rad(D) nilpotent ([11, 18.8 Corollary]). Es existiert also ein m aus den natürlichen Zahlen, so daß $a^{m-1}x \neq 0 = a^m x$ ist. Da y erzeugend in M_D ist, gibt es ein b aus D: yb = x. Man hat also: $0 = 0b = (a^m x)b = (a^{m-1}ax)b = a^{m-1}(ax)b = a^{m-1}(yb) = a^{m-1}x \neq 0$. Widerspruch!

Da R_{ij}^k beidseits lokaler und beidseits zu D isomorpher D- D- Bimodul ist, vermittelt jedes beidseits erzeugende Element x aus R_{ij}^k einen Automorphismus von D; dabei geht d über in d', falls dx = xd' ist: Da R_{ij}^k treuer Rechtsmodul ist, ist diese Zuordnung eine Abbildung. Denn ist dx = xd' = xd" mit d' ≠ d", so folgt: 0x = (d - d)x = x(d' - d"). Da d' ≠ d" ist, gibt es ein Element y aus R_{ij}^k mit y(d' - d") ≠ 0. Da x erzeugend ist, gibt es ein $a \in D$: ax = y. Insgesamt folgt: $0 \neq y(d' - d") = (ax)(d' - d") = a\,x(d' - d") = a0 = 0$. Widerspruch!

Da R_{ij}^k treuer Linksmodul ist, ist diese Abbildung mit analoger Begründung injektiv. Da x erzeugendes Element ist, ist die Abbildung surjektiv, denn zu jedem $d' \in D$ gibt es ein $d \in D$, so daß xd' = dx ist. Die Additivität der Abbildung ergibt sich direkt aus den Distributivgesetzen, die für Mo-

duln gelten. Aus den Assoziativgesetzen folgt direkt, daß diese Zuordnung multiplikativ ist.

Somit ergibt sich (Man beachte, daß man nur ausgenutzt hat, daß D lokaler Artinring ist.):

Lemma 2.1

Ist ${}_DM_D$ Bimodul über einem lokalen artinschen Ring D, ist M als Links- und als Rechtsmodul lokal und zu D isomorph, so ist jedes rechts- oder linksseitig erzeugende Element m aus M ein beidseits erzeugendes Element, das einen Automorphismus von D vermittelt vermöge $d \longmapsto d'$, wenn $dm = md'$ ist.

Beweis:

Folgt direkt aus den Vorbemerkungen.

q.e.d.

Die Forderung, daß es sich bei den betrachteten Ringen um Matrizenringe handelt, wird hauptsächlich deshalb gestellt, damit man im Beweis zu Satz 2.3, bei der Konstruktion des injektiven Kogenerators U, besser den Zusammenhang zwischen U und R sehen kann. Ansonsten ist diese Forderung nicht wesentlich:

Lemma 2.2

Es sei R ein semiperfekter Ring mit $e_1, \ldots, e_n$ einer vollständigen Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente. Es existiere ein lokaler QF- Ring D, so daß $e_iRe_i \cong D$ für alle e_i sei. Ferner sei e_iRe_j mit $i \neq j$ endliche direkte Summe von e_iRe_i- e_jRe_j- Bimoduln R_{ij}^k. Für diese R_{ij}^k gelte, daß sie als e_jRe_j- Rechtsmoduln bzw. als e_iRe_i- Linksmoduln isomorph zu e_jRe_j bzw. zu e_iRe_i seien.

Dann ist R isomorph zu einem verallgemeinerten Matrizenring, wie er in diesem Kapitel definiert wurde. Darüberhinaus ist R artinsch.

Beweis:

Da D lokaler QF- Ring ist, gilt: $lg({}_DD)$ und $lg(D_D)$ sind beide endlich. Da $e_iRe_i \cong D$ ist, ist damit auch e_iRe_i als Links- und als Rechtsmodul über sich von endlicher Länge. Da e_iRe_j als e_jRe_j- Rechtsmodul endliche direkte Summe von

zu e_jRe_j isomorphen Moduln ist, ist natürlich auch e_iRe_j als Rechtsmodul von endlicher Länge. Damit hat man erhalten:

$$\infty > \sum_{i,j=1}^{n} lg(\, e_iRe_j \; e_jRe_j \,) \geq \sum_{i=1}^{n} lg(e_iR_R) \geq lg(R_R).$$

Hieraus folgt, daß R eine Kompositionsreihe hat und damit gemäß [1, 11.1. Proposition] rechtsartinsch ist. Analog folgt, daß R linksartinsch ist.

Sei für alle i $f_i : D \longrightarrow e_iRe_i$ ein Isomorphismus. Dann ist $D' := \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(d) \;\middle|\; d \in D \right\}$ zu D isomorpher Unterring von R. Für $i \neq j$ ist dann e_iRe_j D'- D'- Bimodul. Ferner ist e_iRe_j direkte Summe der R_{ij}^k. Da die R_{ij}^k als Rechts- und als Linksmoduln isomorph zu D' sind, erfüllt

$$R' := \begin{pmatrix} R'_{11}\cdots & \cdots R'_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ & \\ \cdots & \cdots \\ R'_{n1}\cdots & \cdots R'_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $R'_{ii} := D'$ und $R'_{ij} := e_iRe_j$ für $i \neq j$ die Voraussetzungen der hier betrachteten verallgemeinerten Matrizenringe.

Sei $F : R' \longrightarrow R$ definiert durch $F(e_ire_jE_{ij}) := e_ire_j$ für $i \neq j$, $F((\sum_{i=1}^{n} e_ir_ie_i) E_{jj}) := e_jr_je_j$, wobei $\sum_{i=1}^{n} e_ir_ie_i$ aus D' ist. Dann ist F trivialerweise Isomorphismus.

q.e.d.

Satz 2.3

Es sei D lokaler QF- Ring und es sei

$$R := \begin{pmatrix} R_{11}\cdots & \cdots R_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ & \\ \cdots & \cdots \\ R_{n1}\cdots & \cdots R_{nn} \end{pmatrix}$$

verallgemeinerter Matrizenring dergestalt, daß für alle i

$R_{ii} = D$ sei. Für $i \neq j$ sei R_{ij} D- D- Bimodul mit folgenden Eigenschaften: Es existiere ein m_{ij} aus den natürlichen Zahlen ($m_{ij} = 0$ für $R_{ij} = 0$), so daß in R_{ij} m_{ij} Elemente $x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^{m_{ij}}$ vorhanden seien. Für diese x_{ij}^k gelte, daß sie sowohl bzgl. der D- Rechts- als auch bzgl. der D- Linksmodulstruktur von R_{ij} eine Basis darstellen. Ferner gelte: $Dx_{ij}^k = x_{ij}^k D$ für alle $1 \leqq k \leqq m_{ij}$.

Sei für $i \neq j$ $f_{ij}^k: D \longrightarrow D$ der Ringisomorphismus, für den $dx_{ij}^k = x_{ij}^k f_{ij}^k(d)$ gilt. Sei $m_{ii} := 1$, $f_{ii}^1 := id_D$ für alle $1 \leqq i \leqq n$. Sei außerdem $E_{ii} =: e_{ii}^1 =: e_{ii} =: e_i$, $x_{ij}^k E_{ij} =: e_{ij}^k$. Seien d_{ijt}^{kps} aus D so gewählt, daß $e_{ij}^k e_{jt}^p = \sum_{s=1}^{m_{it}} d_{ijt}^{kps} e_{it}^s$ für alle i, j, k, p und t ist.

Wenn für alle i, j, k, p, q und t gilt:

(2.1) $f_{tk}^q(d_{tik}^{jpq}) = f_{ik}^p f_{ti}^j(d_{tik}^{jpq})$,

dann hat R eine schwachsymmetrische Selbstdualität.

Die Gleichheit in (2.1) gilt für alle d_{tik}^{jpq}, die invertierbar sind und für $d_{tik}^{jpq} = 0$.

Beweis:

1. Um die Selbstdualität zu zeigen, soll ein injektiver Kogenerator U zu R konstruiert werden, der die Dualität vermittelt. Gemäß Lemma 2.2 ist R trivialerweise artinscher Ring, man kann also Lemma 0.5 anwenden.

Da R "n- reihiger Matrizenring" ist, soll auch U eine solche Gestalt haben, d. h.:

$$U := \begin{pmatrix} U_{11} \cdots & \cdots U_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ & \\ \cdots & \cdots \\ U_{n1} \cdots & \cdots U_{nn} \end{pmatrix}$$

Auf Grund der Ergebnisse von Kapitel 1 ist es naheliegend, U_{ij} zu R_{ji} "angepaßt" zu wählen. Sei also für festes i und j mit $1 \leq i, j \leq n$ U_{ij} freier D- Linksmodul der Dimension m_{ji}. Sei $v_{ij}^1, \ldots, v_{ij}^{m_{ji}}$ eine Basis für U_{ij}. Von den v_{ij}^k wird ferner verlangt:

(2.2) $f_{ji}^k(d)v_{ij}^k =: v_{ij}^k d.$

Damit ist U_{ij} auch D- Rechtsmodul und die v_{ij}^k bilden auch bzgl. der Rechtsmodulstruktur eine Basis. Somit hat man: $U_{ij} = \overset{m_{ji}}{\underset{k=1}{\bullet}} Dv_{ij}^k = \overset{m_{ji}}{\underset{k=1}{\bullet}} v_{ij}^k D$. Damit hat man U als abelsche Gruppe und als D- D- Bimodul definiert.

Auf U soll R wie folgt operieren (Es sei $u_{ij}^k := v_{ij}^k E_{ij}$):

(2.3) $$e_{ip}^j \cdot u_{kt}^q := \sum_{s=1}^{m_{ti}} u_{it}^s d_{tik}^{sjq} \delta_{pk}$$

$$u_{kq}^p \cdot e_{ti}^j := \sum_{s=1}^{m_{ik}} \delta_{tq} f_{tk}^p (d_{tik}^{jsp}) u_{ki}^s \quad \text{mit } \delta_{pk} := \begin{cases} 0 \text{ für } p \neq k \\ 1 \text{ für } p = k \end{cases}$$

Der letzte Term ist auf Grund von (2.1) identisch zu $\sum_{s=1}^{m_{ik}} u_{ki}^s f_{ti}^j (d_{tik}^{jsp}) \delta_{tq}$. Der Rest der Multiplikation sei lineare Fortsetzung bzgl. D, d. h.:

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ij}} d_{ij}^k e_{ij}^k \Big) \Big(\sum_{p,q=1}^{n} \sum_{t=1}^{m_{pq}} b_{qp}^t u_{qp}^t \Big) :=$$

$$:= \sum_{i,j,p,q=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \sum_{t=1}^{m_{pq}} (d_{ij}^k e_{ij}^k)(b_{qp}^t u_{qp}^t) \text{ und}$$

$$\Big(\sum_{p,q=1}^{n} \sum_{t=1}^{m_{pq}} b_{qp}^t u_{qp}^t \Big) \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ij}} d_{ij}^k e_{ij}^k \Big) :=$$

$$:= \sum_{i,j,p,q=1}^{n} \sum_{t=1}^{m_{pq}} \sum_{k=1}^{m_{ij}} (b_{qp}^t u_{qp}^t)(d_{ij}^k e_{ij}^k).$$

Wobei $(d_{ij}^k e_{ij}^k)(b_{qp}^t u_{qp}^t) := d_{ij}^k (f_{ij}^k)^{-1}(b_{qp}^t) e_{ij}^k u_{qp}^t$ und

$(b_{qp}^t u_{qp}^t)(d_{ij}^k e_{ij}^k) := b_{qp}^t f_{pq}^t (d_{ij}^k) u_{qp}^t e_{ij}^k$ ist.

2. Es ist jetzt zu zeigen, daß U R- R- Bimodul ist:

2.1 Die Verknüpfung ist distributiv.

Dies ergibt sich direkt aus der Definition von U:

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}} d_{ij}^k e_{ij}^k\Big)\Big(\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_{pq}} b_{qp}^l u_{qp}^l + \sum_{r,s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m_{sr}} a_{rs}^t u_{rs}^t\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}} d_{ij}^k e_{ij}^k\Big)\Big(\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{t=1}^{m_{pq}} (b_{qp}^t + a_{qp}^t)u_{qp}^t\Big) =$$

$$= \sum_{i,j,p,q=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{t=1}^{m_{pq}} (d_{ij}^k e_{ij}^k)\Big((b_{qp}^t + a_{qp}^t)u_{qp}^t\Big) =$$

$$= \sum_{i,j,p,q=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{t=1}^{m_{pq}} d_{ij}^k (f_{ij}^k)^{-1}(b_{qp}^t + a_{qp}^t)\, e_{ij}^k u_{qp}^t =$$

$$= \sum_{i,j,p,q=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{t=1}^{m_{pq}} (d_{ij}^k (f_{ij}^k)^{-1}(b_{qp}^t) + d_{ij}^k (f_{ij}^k)^{-1}(a_{qp}^t))\, e_{ij}^k u_{qp}^t =$$

$$= \sum_{i,j,p,q=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{t=1}^{m_{pq}} (d_{ij}^k (f_{ij}^k)^{-1}(b_{qp}^t) e_{ij}^k u_{qp}^t + d_{ij}^k (f_{ij}^k)^{-1}(a_{qp}^t) e_{ij}^k u_{qp}^t) =$$

$$= \sum_{i,j,p,q=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{t=1}^{m_{pq}} ((d_{ij}^k e_{ij}^k)(b_{qp}^t u_{qp}^t) + (d_{ij}^k e_{ij}^k)(a_{qp}^t u_{qp}^t)) =$$

$$= \sum_{i,j,p,q=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{l=1}^{m_{pq}} (d_{ij}^k e_{ij}^k)(b_{qp}^l u_{qp}^l) +$$

$$+ \sum_{i,j,r,s=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{t=1}^{m_{sr}} (d_{ij}^k e_{ij}^k)(a_{rs}^t u_{rs}^t) =$$

$$= \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}} d_{ij}^k e_{ij}^k\Big)\Big(\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_{pq}} b_{qp}^l u_{qp}^l\Big) +$$

$$+ \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ij}} d_{ij}^k e_{ij}^k\Big)\Big(\sum_{r,s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m_{sr}} a_{rs}^t u_{rs}^t\Big).$$

Die anderen Distributivgesetze folgen auf gleich triviale Weise.

2.2 Es gilt $1u = u = u1$ für alle u aus U.

Es ist $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Sei $u = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{ij}^k u_{ij}^k \in U$, so erhält man:

$$1\cdot u = \Big(\sum_{t=1}^{n} e_t\Big)\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{ij}^k u_{ij}^k\Big) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ji}} e_t(d_{ij}^k u_{ij}^k) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{ij}^k e_{tt}^1 u_{ij}^k =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{ij}^k \Big(\sum_{p=1}^{m_{ji}} u_{ij}^p d_{jii}^{p1k} \Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{ij}^k u_{ij}^k = u.$$

Da ${}_1E_{tt} = e_t$ ist, folgt $e_t d_{ij}^k = d_{ij}^k e_t$. D. h.: $f_{tt}^1 = id_D$.

Da $e_{ji}^p e_{ii}^1 = \sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{jii}^{p1k} e_{ji}^k$ ist, dies aber auch gleich e_{ji}^p sein muß, folgt $d_{jii}^{p1k} = \delta_{pk}$ und damit die letzte Gleichung.

Da $e_{jj}^1 e_{ji}^p = \sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{jji}^{1pk} e_{ji}^k = e_{ji}^p$ ist, folgt:

(2.4) $d_{jji}^{1pk} = \delta_{pk}$

Weil die Ringautomorphismen f_{ji}^k 0 und 1 respektieren gilt: $f_{ji}^k(\delta_{pk}) = \delta_{pk}$. Man erhält jetzt:

$$u \cdot 1 = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{ij}^k u_{ij}^k \Big) \Big(\sum_{t=1}^{n} e_t \Big) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{ij}^k (u_{ij}^k e_{tt}^1) = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{ij}^k \Big(\sum_{p=1}^{m_{ji}} f_{ji}^k (d_{jji}^{1pk}) u_{ij}^p \Big) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{ij}^k \Big(\sum_{p=1}^{m_{ji}} \delta_{pk} u_{ij}^p \Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ji}} d_{ij}^k u_{ij}^k = u.$$

2.3 R operiert beidseits assoziativ auf U:

2.3.1 Da die e_{ij}^k eine Basis für ${}_DR_{ij}$ bilden, folgt, daß genau dann $a_t e_{ij}^t = b_t e_{ij}^t$ für alle $1 \leq t \leq m_{ij}$ ist, wenn $\sum_{t=1}^{m_{ji}} a_t e_{ij}^t = \sum_{t=1}^{m_{ji}} b_t e_{ij}^t$ ist. Man betrachte jetzt:

$$\sum_{p=1}^{m_{tk}} \Big((f_{ti}^s)^{-1}(f_{ik}^j)^{-1}(d)\, d_{tik}^{sjp} \Big) e_{tk}^p = (f_{ti}^s)^{-1}(f_{ik}^j)^{-1}(d) e_{ti}^s e_{ik}^j =$$

$$= e_{ti}^s e_{ik}^j d = \sum_{p=1}^{m_{tk}} d_{tik}^{sjp} e_{tk}^p d = \sum_{p=1}^{m_{tk}} \Big(d_{tik}^{sjp} (f_{tk}^p)^{-1}(d) \Big) e_{tk}^p$$

Hieraus erhält man also:

(2.5) $(f^s_{ti})^{-1}(f^j_{ik})^{-1}(d)\ d^{sjp}_{tik} = d^{sjp}_{tik}\ (f^p_{tk})^{-1}(d)$ für alle t, i, k, j, s und p und alle d aus D.

Es ist $e^j_{ik}(du^p_{kt}) = e^j_{ik}(u^p_{kt}(f^p_{tk})^{-1}(d))$. Mit (2.5) gilt aber außerdem: $(e^j_{ik}u^p_{kt})(f^p_{tk})^{-1}(d) = \sum_{s=1}^{m_{ti}} u^s_{it}d^{sjp}_{tik}(f^p_{tk})^{-1}(d) =$

$= \sum_{s=1}^{m_{ti}} u^s_{it}(f^s_{ti})^{-1}(f^j_{ik})^{-1}(d)d^{sjp}_{tik} = \sum_{s=1}^{m_{ti}} (f^j_{ik})^{-1}(d)u^s_{it}d^{sjp}_{tik} =$

$= (f^j_{ik})^{-1}(d)(\sum_{s=1}^{m_{ti}} u^s_{it}d^{sjp}_{tik}) = (f^j_{ik})^{-1}(d)e^j_{ik}u^p_{kt} = (e^j_{ik}d)u^p_{kt}.$

Damit gilt also: $e^j_{ik}(u^p_{kt}b) = (e^j_{ik}u^p_{kt})b$ für alle b aus D.

2.3.2 Es gilt: $\sum_{q=1}^{m_{tk}} e^q_{tk}(\ f^q_{tk}(d^{jpq}_{tik})f^p_{ik}f^j_{ti}(d)\ ) =$

$= \sum_{q=1}^{m_{tk}} d^{jpq}_{tik}e^q_{tk}\ f^p_{ik}f^j_{ti}(d) = e^j_{ti}e^p_{ik}f^p_{ik}f^j_{ti}(d) = de^j_{ti}e^p_{ik} =$

$= \sum_{q=1}^{m_{tk}} d\cdot d^{jpq}_{tik}e^q_{tk} = \sum_{q=1}^{m_{tk}} e^q_{tk}(\ f^q_{tk}(d\cdot d^{jpq}_{tik})\ )$

Analog zu 2.2.1 folgt daraus:

(2.6) $f^q_{tk}(d^{jpq}_{tik})f^p_{ik}f^j_{ti}(d) = f^q_{tk}(d\cdot d^{jpq}_{tik})$ für alle d aus D

Damit kann man zeigen:

$u^q_{kt}(de^j_{ti}) = f^q_{tk}(d)u^q_{kt}e^j_{ti} = f^q_{tk}(d)(\sum_{p=1}^{m_{ik}} f^q_{tk}(d^{jpq}_{tik})u^p_{ki}) =$

$= \sum_{p=1}^{m_{ik}} f^q_{tk}(d\cdot d^{jpq}_{tik})u^p_{ki} = \sum_{p=1}^{m_{ik}} f^q_{tk}(d^{jpq}_{tik})f^p_{ik}f^j_{ti}(d)u^p_{ki} =$

$= \sum_{p=1}^{m_{ik}} f^q_{tk}(d^{jpq}_{tik})u^p_{ki}f^j_{ti}(d) = (u^q_{kt}e^j_{ti})f^j_{ti}(d)$. Da $u^q_{kt}(e^j_{ti}f^j_{ti}(d)) =$

$= u^q_{kt}(de^j_{ti})$ ist, gilt: $u^q_{kt}(e^j_{ti}b) = (u^q_{kt}e^j_{ti})b$ für alle $b \in D$.

2.3.3 Es gilt: $\sum_{q=1}^{m_{pl}} (\sum_{h=1}^{m_{pk}} d^{rjh}_{pik} d^{htq}_{pkl}) e^{q}_{pl} =$

$= \sum_{h=1}^{m_{pk}} d^{rjh}_{pik} (\sum_{q=1}^{m_{pl}} d^{htq}_{pkl} e^{q}_{pl}) = \sum_{h=1}^{m_{pk}} d^{rjh}_{pik} e^{h}_{pk} e^{t}_{kl} = (e^{r}_{pi} e^{j}_{ik}) e^{t}_{kl} =$

$= e^{r}_{pi} (e^{j}_{ik} e^{t}_{kl}) = e^{r}_{pi} (\sum_{s=1}^{m_{il}} d^{jts}_{ikl} e^{s}_{il}) = \sum_{s=1}^{m_{il}} (f^{r}_{pi})^{-1} (d^{jts}_{ikl}) e^{r}_{pi} e^{s}_{il} =$

$= \sum_{s=1}^{m_{il}} (f^{r}_{pi})^{-1} (d^{jts}_{ikl}) (\sum_{q=1}^{m_{pl}} d^{rsq}_{pil} e^{q}_{pl}) = \sum_{q=1}^{m_{pl}} (\sum_{s=1}^{m_{il}} (f^{r}_{pi})^{-1} (d^{jts}_{ikl}) d^{rsq}_{pil}) e^{q}_{pl}.$

Daraus folgt:

(2.7) $\sum_{s=1}^{m_{il}} (f^{r}_{pi})^{-1} (d^{jts}_{ikl}) d^{rsq}_{pil} = \sum_{h=1}^{m_{pk}} d^{rjh}_{pik} d^{htq}_{pkl}.$

Dies Ergebnis nutzt man, um zu zeigen:

$(e^{j}_{ik} e^{t}_{kl}) u^{q}_{lp} = (\sum_{s=1}^{m_{il}} d^{jts}_{ikl} e^{s}_{il}) u^{q}_{lp} = \sum_{s=1}^{m_{il}} d^{jts}_{ikl} (\sum_{r=1}^{m_{pi}} u^{r}_{ip} d^{rsq}_{pil}) =$

$= \sum_{r=1}^{m_{pi}} u^{r}_{ip} (\sum_{s=1}^{m_{il}} (f^{r}_{pi})^{-1} (d^{jts}_{ikl}) d^{rsq}_{pil}) = \sum_{r=1}^{m_{pi}} u^{r}_{ip} (\sum_{h=1}^{m_{pk}} d^{rjh}_{pik} d^{htq}_{pkl}) =$

$= \sum_{h=1}^{m_{pk}} (\sum_{r=1}^{m_{pi}} u^{r}_{ip} d^{rjh}_{pik}) d^{htq}_{pkl} = \sum_{h=1}^{m_{pk}} (e^{j}_{ik} u^{h}_{kp}) d^{htq}_{pkl} =$

$= e^{j}_{ik} (\sum_{h=1}^{m_{pk}} u^{h}_{kp} d^{htq}_{pkl}) = e^{j}_{ik} (e^{t}_{kl} u^{q}_{lp}).$

2.3.4 Durch Umindizierungen folgt aus (2.7), d. h. aus $\sum_{s=1}^{m_{il}} (f^{r}_{pi})^{-1} (d^{jts}_{ikl}) d^{rsq}_{pil} = \sum_{h=1}^{m_{pk}} d^{rjh}_{pik} d^{htq}_{pkl}$ folgende Gleichung:

$\sum_{h=1}^{m_{pk}} (f^{q}_{lp})^{-1} (d^{rjh}_{pik}) d^{qht}_{lpk} = \sum_{s=1}^{m_{li}} d^{qrs}_{lpi} d^{sjt}_{lik}$. Als Bild von f^{q}_{lp} erhält man daraus:

$\sum_{h=1}^{m_{pk}} d^{rjh}_{pik} f^{q}_{lp} (d^{qht}_{lpk}) = \sum_{s=1}^{m_{li}} f^{q}_{lp} (d^{qrs}_{lpi}) f^{q}_{lp} (d^{sjt}_{lik})$

Dieses Ergebnis nutzt man für folgende Rechnung:

$$(e^j_{ik}u^t_{kl})e^q_{lp} = \Big(\sum_{s=1}^{m_{li}} u^s_{il}d^{sjt}_{lik}\Big)e^q_{lp} = \sum_{s=1}^{m_{li}} u^s_{il}e^q_{lp}f^q_{lp}(d^{sjt}_{lik}) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m_{li}}\sum_{r=1}^{m_{pi}} u^r_{ip}f^q_{lp}(d^{qrs}_{lpi})f^q_{lp}(d^{sjt}_{lik}) = \sum_{r=1}^{m_{pi}} u^r_{ip}\Big(\sum_{s=1}^{m_{li}} f^q_{lp}(d^{qrs}_{lpi})f^q_{lp}(d^{sjt}_{lik})\Big) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m_{pi}} u^r_{ip}\Big(\sum_{h=1}^{m_{pk}} d^{rjh}_{pik}f^q_{lp}(d^{qht}_{lpk})\Big) = \sum_{h=1}^{m_{pk}}\Big(\sum_{r=1}^{m_{pi}} u^r_{ip}d^{rjh}_{pik}\Big)f^q_{lp}(d^{qht}_{lpk}) =$$

$$= \sum_{h=1}^{m_{pk}} (e^j_{ik}u^h_{kp})f^q_{lp}(d^{qht}_{lpk}) = e^j_{ik}\Big(\sum_{h=1}^{m_{pk}} u^h_{kp}f^q_{lp}(d^{qht}_{lpk})\Big) = e^j_{ik}(u^t_{kl}e^q_{lp}).$$

2.3.5 Für diesen Fall kann man aus (2.7) durch Umindizierung erhalten:

$\sum_{h=1}^{m_{li}} (f^t_{kl})^{-1}(d^{qrh}_{lpi})d^{thj}_{kli} = \sum_{s=1}^{m_{kp}} d^{tqs}_{klp}d^{srj}_{kpi}$. Gemäß (2.5) erhält man:

$(f^t_{kl})^{-1}(d^{qrh}_{lpi})d^{thj}_{kli} = (f^t_{kl})^{-1}(f^h_{li})^{-1}\big(f^h_{li}(d^{qrh}_{lpi})\big)d^{thj}_{kli} =$

$= d^{thj}_{kli}(f^j_{ki})^{-1}\circ f^h_{li}(d^{qrh}_{kli})$. Somit hat man also erhalten:

$$\sum_{h=1}^{m_{li}} d^{thj}_{kli}(f^j_{ki})^{-1}\circ f^h_{li}(d^{qrh}_{lpi}) = \sum_{h=1}^{m_{kp}} d^{tqs}_{klp}d^{srj}_{kpi}.$$

Als Bild von f^j_{ki} erhält man:

$$\sum_{h=1}^{m_{li}} f^j_{ki}(d^{thj}_{kli})f^h_{li}(d^{qrh}_{lpi}) = \sum_{s=1}^{m_{kp}} f^j_{ki}(d^{tqs}_{klp}d^{srj}_{kpi})$$

Damit kann man zum letzten Fall kommen:

$$u^j_{ik}(e^t_{kl}e^q_{lp}) = u^j_{ik}\Big(\sum_{s=1}^{m_{kp}} d^{tqs}_{klp}e^s_{kp}\Big) = \sum_{s=1}^{m_{kp}} f^j_{ki}(d^{tqs}_{klp})u^j_{ik}e^s_{kp} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m_{kp}} f^j_{ki}(d^{tqs}_{klp})\Big(\sum_{r=1}^{m_{pi}} f^j_{ki}(d^{srj}_{kpi})u^r_{ip}\Big) = \sum_{r=1}^{m_{pi}}\Big(\sum_{s=1}^{m_{kp}} f^j_{ki}(d^{tqs}_{klp}d^{srj}_{kpi})\Big)u^r_{ip} =$$

$$= \sum_{r=1}^{m_{pi}}\Big(\sum_{h=1}^{m_{li}} f^j_{ki}(d^{thj}_{kli})f^h_{li}(d^{qrh}_{lpi})\Big)u^r_{ip} =$$

$$= \sum_{h=1}^{m_{li}} f^j_{ki}(d^{thj}_{kli})\Big(\sum_{r=1}^{m_{pi}} f^h_{li}(d^{qrh}_{lpi})u^r_{ip}\Big) = \sum_{h=1}^{m_{li}} f^j_{ki}(d^{thj}_{kli})(u^h_{il}e^q_{lp}) =$$

$$= \Big(\sum_{h=1}^{m_{li}} f^j_{ki}(d^{thj}_{kli})u^h_{il}\Big)e^q_{lp} = (u^j_{ik}e^t_{kl})e^q_{lp}.$$

Auf Grund von 2.3.1 und 2.3.2, der D- D- Bimodulstruktur und der Definition der R- Struktur von U kommt es bei der Multiplikation mit Elementen aus D nicht auf die Reihenfolge der Klammerung an. Aus 2.3.3, 2.3.4 und 2.3.5 erhält man dann:

i) $((d^j_{ik}e^j_{ik})(b^t_{kl}e^t_{kl}))(a^q_{lp}u^q_{lp}) = (d^j_{ik}e^j_{ik})((b^t_{kl}e^t_{kl})(a^q_{lp}u^q_{lp}))$

ii) $((d^j_{ik}e^j_{ik})(b^t_{kl}u^t_{kl}))(a^q_{lp}e^q_{lp}) = (d^j_{ik}e^j_{ik})((b^t_{kl}u^t_{kl})(a^q_{lp}e^q_{lp}))$

iii) $((d^j_{ik}u^j_{ik})(b^t_{kl}e^t_{kl}))(a^q_{lp}e^q_{lp}) = (d^j_{ik}u^j_{ik})((b^t_{kl}e^t_{kl})(a^q_{lp}e^q_{lp}))$

Durch Aufsummieren über alle Indizes erhält man die drei für eine Bimodulstruktur notwendigen Assoziativgesetze. Dabei beachte man, daß für $s \neq k$ oder $r \neq l$ sowohl $(d^j_{ik}e^j_{ik}) \cdot ((b^t_{sl}e^t_{sl})(a^q_{rp}u^q_{rp}))$, als auch $((d^j_{ik}e^j_{ik})(b^t_{sl}u^t_{sl}))(a^q_{rp}u^q_{rp})$ gleich 0 ist. Gleiches gilt natürlich auch für die anderen Fälle.

Sei als nächstes gezeigt:

3. U ist injektiver Kogenerator:

Sei $T := \sum_{p=1}^{n} De_p$. T ist dann selbstdualer Unterring von R, denn T ist QF- Ring. Nach Lemma 0.6 ist ${}_RE := {}_R\mathrm{Hom}_T({}_TR_R, {}_TT)$ injektiver Kogenerator in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$, $E'_R := \mathrm{Hom}_T({}_RR_T, T_T)_R$ ist injektiver Kogenerator in $\underline{\mathrm{Mod}}_R$.

3.1 Sei $F: {}_RU \longrightarrow {}_RE$ definiert durch $(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ij}} d^k_{ji}u^k_{ji})F :=$ $:= f: e^k_{ij} \longmapsto (f^k_{ij})^{-1}(d^k_{ji}) \cdot e_i$. f sei dann bzgl. T linear fortgesetzt. F ist trivialerweise additive und injektive Abbildung. Für f aus E gilt $(e^k_{ij})f = (e_ie^k_{ij})f = e_i(e^k_{ij})f = e_id^k_{ji}$. Somit ist $(u)F = f$, wenn man $u := \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ij}} f^k_{ij}(d^k_{ji})u^k_{ji}$ setzt. Damit ist F surjektiv.

F ist auch R- linear. Auf Grund der Additivität kann man sich auf den Fall $b^r_{qp}e^r_{qp} \in R$, $d^t_{pl}u^t_{pl} \in U$ beschränken:

$$b^r_{qp}e^r_{qp}d^t_{pl}u^t_{pl} = b^r_{qp}(f^r_{qp})^{-1}(d^t_{pl}) \cdot e^r_{qp}u^t_{pl} =$$

$= b^r_{qp}(f^r_{qp})^{-1}(d^t_{pl})\cdot(\sum_{j=1}^{m_{lq}} u^j_{ql} d^{jrt}_{lqp}) =$

$= \sum_{j=1}^{m_{lq}} (b^r_{qp}(f^r_{qp})^{-1}(d^t_{pl}) f^j_{lq}(d^{jrt}_{lqp})) u^j_{ql}$. Damit gilt:

$(e^s_{ik})((b^r_{qp}e^r_{qp})(d^t_{pl}u^t_{pl}))F = (f^s_{lq})^{-1}(b^r_{qp}(f^r_{qp})^{-1}(d^t_{pl}))\, d^{srt}_{lqp} e_l$

für i = l und k = q, ansonsten ist der rechte Term 0. Nach (2.5) gilt: $(f^s_{lq})^{-1}(f^r_{qp})^{-1}(d^t_{pl})\cdot d^{srt}_{lqp} = d^{srt}_{lqp}(f^t_{lp})^{-1}(d^t_{pl})$, d. h.:

$(e^s_{lq})((b^r_{qp}e^r_{qp})(d^t_{pl}u^t_{pl}))F = (f^s_{lq})^{-1}(b^r_{qp})\cdot d^{srt}_{lqp}(f^t_{lp})^{-1}(d^t_{pl})\cdot e_l.$

Andererseits gilt aber:

$(e^s_{ik})(b^r_{qp}e^r_{qp})(d^t_{pl}u^t_{pl})F = ((f^s_{ik})^{-1}(b^r_{qp})\, e^s_{ik}e^r_{qp})(d^t_{pl}u^t_{pl})F =$

$= ((f^s_{iq})^{-1}(b^r_{qp})\cdot(\sum_{j=1}^{m_{ip}} d^{srj}_{iqp}e^j_{ip}))(d^t_{pl}u^t_{pl})F =$

$= \sum_{j=1}^{m_{ip}} (f^s_{iq})^{-1}(b^r_{qp})\, d^{srj}_{iqp}\, (e^j_{ip})(d^t_{pl}u^t_{pl})F =$

$= (f^s_{lq})^{-1}(b^r_{qp})\cdot d^{srt}_{iqp}\cdot(f^t_{lp})^{-1}(d^t_{pl})e_l$ für q = k und i = l, andernfalls wäre dieser Term gleich 0. Damit erhält man insgesamt:
$(b^r_{qp}e^r_{qp})((d^t_{pl}u^t_{pl})F) = ((b^r_{qp}e^r_{qp})(d^t_{pl}u^t_{pl}))\, F$. Also ist ${}_RU$ injektiver Kogenerator.

3.2 Für U_R sei $G: U_R \longrightarrow E'_R$ definiert durch:

$G(\sum_{i,l=1}^{n} \sum_{t=1}^{m_{li}} d^t_{il}u^t_{il})(e^s_{pq}) := d^s_{qp}e_q.$

Analog zu F erhält man, daß G Gruppenisomorphismus zwischen den abelschen Gruppen U und E ist.

Es verbleibt zu zeigen, daß G R- linear ist:

$G(d^t_{il}u^t_{il})(b^q_{lp}e^q_{lp})(e^k_{rs}) = G(d^t_{il}u^t_{il})(b^q_{lp} (\sum_{j=1}^{m_{ls}} d^{qkj}_{lps}e^j_{ls})) =$

$= \sum_{j=1}^{m_{ls}} G(d^t_{il}u^t_{il})(e^j_{ls})\, f^j_{ls}(b^q_{lp}d^{qkj}_{lps}) = d^t_{il}e_i\, f^t_{li}(b^q_{lp}d^{qkt}_{lpi})$ für

p = r und i = s, sonst ist dies Null. Betrachten wir jetzt:

$d^t_{il}u^t_{il}b^q_{lp}e^q_{lp} = d^t_{il}f^t_{li}(b^q_{lp})(\sum_{j=1}^{m_{pi}} f^t_{li}(d^{qjt}_{lpi})u^j_{ip}) =$

$= \sum_{j=1}^{m_{pi}} d^t_{il}f^t_{li}(b^q_{lp}d^{qjt}_{lpi})u^j_{ip}$. Dies kann man ausnutzen, um zu zeigen:

$G((d^t_{il}u^t_{il})(b^q_{lp}e^q_{lp}))(e^k_{rs}) = G(\sum_{j=1}^{m_{pi}} d^t_{il}f^t_{li}(b^q_{lp}d^{qjt}_{lpi})u^j_{ip})(e^k_{rs}) =$

$= d^t_{il}f^t_{li}(b^q_{lp}d^{qkt}_{lpi})\cdot e_i$ für $r = p$ und $s = i$, ansonsten ist auch dieser Term gleich Null. Damit ist G R- linear und dies zieht nach sich, daß U auch Kogenerator in $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ ist.

4. Es verbleibt noch zu zeigen, daß $\mathrm{Hom}_R(-, U)$ einfache Moduln in ebensolche überführt.

Ist R verallgemeinerter Matrizenring, so ist $e_1, \ldots, e_n$ eine vollständige Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente. Man kann von dieser Menge eine Teilmenge $e_{k_1}, \ldots$ $\ldots, e_{k_p}$ auswählen, so daß die Teilmenge Basismenge ist. Setzt man $f := \sum_{i=1}^{p} e_{k_i}$, so ist fRf im wesentlichen wieder verallgemeinerter Matrizenring: Denn an der (k_i,k_i)- ten Stelle von fRf stehen Elemente aus D. Für $i \neq j$ stehen an der (k_i,k_j)-ten Stelle Elemente aus $R_{k_ik_j}$. Da R verallgemeinerter Matrizenring ist, ist $R_{k_ik_j}$ als Bimodul direkte Summe von sowohl als Links- als auch als Rechtsmodul zu D isomorphen Untermoduln. Damit ist fRf im wesentlichen verallgemeinerter Matrizenring.

Man kann also o. B. d. A. annehmen, daß R Basisring ist.

4.1 Nach Lemma 1.1 a) gilt:

$$J = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{k=1}^{m_{ji}} De^k_{ji} + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{Rad}(D)e_p.$$

Ist $d\,u^i_{kl} \neq 0$, so gilt $e^i_{lk}du^i_{kl} = (f^i_{lk})^{-1}(d)\cdot e^i_{lk}u^i_{kl} =$

$= (f^i_{lk})^{-1}(d).u^1_{ll}d^{1ii}_{llk} = (f^i_{lk})^{-1}(d).u^1_{ll} \neq 0$, da nach (2.4) $d^{1ii}_{llk} = \delta_{ii} = 1$ gilt. Da für $l \neq k$ e^i_{lk} aus J ist, folgt also: $Soc({}_RU) = ann_U(J) \subset \sum_{k=1}^{n} Du^1_{kk}$.

Für $d \notin Soc(D)$ gilt, daß es ein $b \in Rad(D)$ gibt mit: $bd \neq 0$. Für dieses d gilt also: $du^1_{kk} \notin ann_U(J) = Soc({}_RU)$. Man hat demnach: $Soc({}_RU) \subset \sum_{k=1}^{n} Soc(D)u^1_{kk}$. Daraus folgt: $Soc({}_RUe_j) \subset Soc(D)u^1_{jj}$. $Soc(D)u^1_{jj}$ ist einfacher R- Modul, denn Soc(D) ist einfacher D- Modul, da ja D lokaler QF- Ring ist. Weil $Soc({}_RUe_j) \neq 0$ sein muß nach [1, 1.11. Corollary], denn Ue_j ist endlich erzeugter R- Modul, folgt: $Soc({}_RUe_j) = Soc(D)u^1_{jj}$. Insgesamt folgt: $Soc({}_RU) = \sum_{k=1}^{n} Soc(D)u^1_{kk}$. Analog folgt: $Soc(U_R) = \sum_{k=1}^{n} u^1_{kk}Soc(D) = \sum_{k=1}^{n} Soc(D)u^1_{kk}$. Damit sind $Soc(U_R)$ und $Soc({}_RU)$ identisch.

4.2 Ist M einfacher R- Linksmodul, so gibt es ein p, so daß ${}_RM \cong Re_p/Je_p$ ist. Da das Bild eines einfachen Moduls im Sockel des Bildmoduls liegt, da ferner $e_kM = 0$ ist für $k \neq p$, folgt für $f \in Hom_R(M, U)$: $Imf \subset Soc(Ue_p) = Soc(D)u^1_{pp}$. Sei $0 \neq g \in Hom_R(M, U)$. Es existiert ein $m \in M$, so daß $(m)g \neq 0$ ist. Da Soc(D) einfacher D Modul ist, ist auch $Soc(D)u^1_{pp}$ einfacher R- Modul. D. h.: Es existiert ein r aus R, so daß $(m)f = (m)gr$ ist. Da f und g R-linear sind, folgt also, daß für alle s aus R $(sm)f = (sm)gr$ ist. Da M einfach ist, ist m erzeugendes Element von M, denn es muß ja von Null verschieden sein. Damit folgt, daß für alle $x \in M$ gilt, daß $(x)f = (x)gr$ ist. Daraus folgt aber $f = gr$. Also ist jedes von Null verschiedene g aus $Hom_R(M, U)$ erzeugendes Element für $Hom_R(M, U)$. Dies bedeutet aber: $Hom_R(M, U)$ ist einfacher R-

Rechtsmodul.

Analog folgt, daß für jeden einfachen R- Rechtsmodul N_R $\mathrm{Hom}_R(N, U)$ einfacher R- Linksmodul ist. Insgesamt ist also gezeigt, daß R vermöge U selbstdual ist.

Da $\mathrm{Soc}(U)e_k \cong \mathrm{Re}_k/\mathrm{Je}_k$ nach Konstruktion ist, folgt nach Lemma 0.8, daß die Selbstdualität schwachsymmetrisch ist.

5. Nach (2.6) gilt: $f^q_{tk}(d^{jpq}_{tik}) \cdot f^p_{ik} \circ f^j_{ti}(d) = f^q_{tk}(d \cdot d^{jpq}_{tik})$.

Setzt man hier speziell $d := d^{jpq}_{tik}$, so erhält man:

$f^q_{tk}(d^{jpq}_{tik}) \cdot f^p_{ik} \circ f^j_{ti}(d^{jpq}_{tik}) = f^q_{tk}((d^{jpq}_{tik})^2) = (f^q_{tk}(d^{jpq}_{tik}))^2$.

Ist jetzt d^{jpq}_{tik} invertierbar, so ist natürlich auch $f^q_{tk}(d^{jpq}_{tik})$ invertierbar. Damit gilt in diesem Falle: $f^p_{ik} \circ f^j_{ti}(d^{jpq}_{tik}) =$

$= f^q_{tk}(d^{jpq}_{tik})$. Diese Gleichheit gilt trivialerweise auch im Fall $d^{jpq}_{tik} = 0$. Damit ist (2.1) in diesen beiden Fällen immer erfüllt.

q.e.d.

Korollar 1

Es sei R semiperfekter Ring mit $e_1, \ldots, e_n$ einer vollständigen Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente. Es sei für alle e_i $e_i\mathrm{Re}_i$ Schiefkörper. Für $i \neq j$ sei $e_i\mathrm{Re}_j =$

$= \overset{m_{ij}}{\underset{k=1}{\oplus}} R^k_{ij}$. Dabei seien die R^k_{ij} sowohl als Rechts-, als auch als Linksmodul eindimensional. Die m_{ij} seien geeignet gewählt. Dann hat R eine schwachsymmetrische Selbstdualität.

Beweis:

Es sei R o. B. d. A. unzerlegbarer Ring. Dann gibt es für $e_i\mathrm{Re}_j \neq 0$ und $e_i \neq e_j$ eine Isomorphie zwischen $e_i\mathrm{Re}_i$ und $e_j\mathrm{Re}_j$: R^1_{ij} ist beidseits lokaler Modul, weil aber $e_i\mathrm{Re}_i$ und $e_j\mathrm{Re}_j$ Schiefkörper sind, sind ihre lokalen Moduln zu ihnen isomorph. Damit folgt aus Lemma 2.1, daß $e_i\mathrm{Re}_i$ zu $e_j\mathrm{Re}_j$ isomorph ist. Da R unzerlegbar ist, existiert zu jedem e_i und e_j eine Folge

$e_i = e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_t} = e_j$ von Idempotenten, so daß jeweils $e_{k_p} R e_{k_{p+1}} \neq 0$ oder $e_{k_{p+1}} R e_{k_p} \neq 0$ ist. Damit sind alle $e_i R e_i$ zueinander isomorph. Insgesamt ist gezeigt, daß R die Voraussetzungen von Lemma 2.2 erfüllt. Damit ist R zu einem der hier betrachteten verallgemeinerten Matrizenringe isomorph.

Da alle $e_i R e_i$ Schiefkörper sind, sind alle d^{ijk}_{pqr} aus Satz 2.3 invertierbar oder Null. Damit ist (2.1) immer erfüllt. Somit folgt aus Satz 2.3 die Behauptung.

q.e.d.

Korollar 2

Es sei R semiperfekter Ring, $e_1, \ldots, e_n$ sei eine vollständige Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente von R. Ist $e_i R e_i$ für alle e_i Schiefkörper und gilt für alle e_i, e_j $lg(e_i R e_j \; e_j R e_j) \leq 1$ und $lg(e_i R e_i \; e_i R e_j) \leq 1$, so hat R eine gute Selbstdualität.

Beweis:

R erfüllt die Voraussetzungen von Korollar 1, denn daß die Länge von $e_i R e_j$ als Rechts- und auch als Linksmodul nicht größer als eins ist bedingt, daß $e_i R e_j$ entweder Null oder beidseits lokaler Modul ist. Damit hat R nach Korollar 1 eine schwachsymmetrische Selbstdualität.

Da $e_i R e_j$ trivialerweise einreihiger $e_i R e_i$- Linksmodul ist, folgt nach (0.6), daß ${}_R R e_j$ distributiv ist. Mit Korollar 5 zu Satz 1.3 erhält man jetzt die Behauptung.

q.e.d.

Korollar 3

Es sei D lokaler einreihiger Ring, R verallgemeinerter Matrizenring über D wie in Satz 2.3. Ferner gelte: $m_{pq} \leq 1$ für alle $1 \leq p,q \leq n$. Außerdem erfülle R (2.1). Dann ist R Ring mit guter Dualität. Speziell sind alle Faktorringe von HDE- Unterringen von R selbstdual.

Beweis:

Nach Satz 2.3 hat R eine schwachsymmetrische Selbstdualität. Man kann jetzt analog Korollar 2 argumentieren:

Da $e_i R e_j$ einreihiger $e_j R e_j$- Rechtsmodul für alle e_i, e_j

ist, folgt nach (0.6), daß e_iR für alle $1 \leq i \leq n$ distributiv ist. Mit Korollar 5 zu Satz 1.3, erhält man dann wieder die Behauptung.

q.e.d.

Beispiel: Es gibt verallgemeinerte Matrizenringe, für die (2.1) nicht immer gilt:

Es sei K ein Körper, $D := K[X]/\langle X^2\rangle$. Trivialerweise ist D lokaler einreihiger Ring mit $lg({}_DD) = 2$. Sei

$$T := \begin{pmatrix} D & D & D \\ & D & D \\ 0 & & D \end{pmatrix}$$

der dreireihige obere Dreiecksmatrizenring über D. Trivialerweise ist T artinscher Ring. Ferner ist

$$I := \begin{pmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zweiseitiges Ideal in T. Somit ist auch $S := T/I$ artinscher Ring.

Sei s aus K, $0 \neq s \neq 1$. Sei $f_{13}: D \longrightarrow D$, $f_{13}(a + b\overline{X}) := a + sb\overline{X}$. f_{13} ist, wie man sofort sieht, Gruppenautomorphismus von D. Außerdem gilt: $f_{13}(a + b\overline{X})\cdot f_{13}(a' + b'\overline{X}) = (a + sb\overline{X})\cdot(a' + sb'\overline{X}) = aa' + s(ab' + ba')\overline{X} = f_{13}(aa' + (ab' + ba')\overline{X})) = f_{13}((a + b\overline{X})(a' + b'\overline{X}))$. Damit ist f_{13} sogar Ringautomorphismus.

Sei ${}_SM_S := De_{13}$ mit $dE_{ij}d'e_{13} := d\cdot d'e_{13}$ für $E_{ij} = E_{11}$, $0\cdot e_{13}$ sonst. $d'e_{13}dE_{ij} := d'f_{13}(d)e_{13}$ für $i = j = 3$, ansonsten sei auch dieser Term 0. Da dE_{11} nur für $i = 1$, dE_{j3} nur für $j = 3$ ungleich Null sein kann, kann man auch $dE_{ij}d'e_{13} = d\cdot d'\delta_{j1}e_{13}$ bzw. $d'e_{13}dE_{ij} = d'f_{13}(d)\delta_{i3}e_{13}$ setzen.

Sei $R := S + M$ als abelsche Gruppe. Für die Multiplikation gelte: $E_{12}E_{23} := \overline{X}e_{13}$, $e_{13}^2 := 0$. Ansonsten sei die Multiplikation von S, bzw. die Bimodulstruktur von M übernommen. R ist mit dieser Multiplikation Ring:

Auf Grund der oberen Dreiecksgestalt interessiert nur die Frage, ob folgende Gleichungen gelten: $\overline{X}e_{13}abc = E_{12}E_{23}abc =$

$= aE_{11}\cdot E_{12}\cdot bE_{22}\cdot E_{23}\cdot cE_{33} = abc\cdot E_{12}E_{23} = abc\overline{X}e_{13}$ mit $a,b,c \in D$.
D. h., es interessiert nur die Frage, ob $(d + d'\overline{X})\overline{X}e_{13} =$
$= \overline{X}e_{13}(d + d'\overline{X})$ ist, wobei d, d' aus K seien:
$(d + d'\overline{X})\overline{X}e_{13} = d\,\overline{X}e_{13} = \overline{X}de_{13} = \overline{X}e_{13}d = \overline{X}e_{13}(d + d'\overline{X})$, denn
f_{13} ist auf K die Identität. Somit ist R Ring.

Mit den Bezeichnungen des Satzes gilt: $d_{123}^{111} = \overline{X}$. Aber $f_{13}^{1}(d_{123}^{111}) = s\overline{X} \neq \overline{X} = f_{23}^{1}\circ f_{12}^{1}(d_{123}^{111})$. Damit läßt sich die Konstruktion von U nicht mehr durchführen, denn man kann immer noch U als R- Links- und als R- Rechtsmodul mit Hilfe von (2.3) definieren, aber U wäre kein Bimodul mehr!

$K' := \left\{ \sum_{i=1}^{3} dE_{ii} \;\middle|\; d \in K \right\}$ ist zu K isomorpher Unterring von R. Da die Elemente von K' mit allen Ringelementen kommutieren, ist R also eine K'- Algebra. Damit ist R trotzdem selbstdualer Ring.

K a p i t e l 3

E i n r e i h i g e R i n g e

Einen artinschen Ring R nennt man einen einreihigen Ring, wenn der Untermodulverband eines jeden unzerlegbaren Moduls eine Kette ist, d. h.: Ist $0 \neq {}_RM$ unzerlegbarer R- Linksmodul, so ist $JM \subset M$ einziger maximaler Untermodul und $M \supset JM \supset \supset J^2M \supset \ldots \supset 0$ einzige Kompositionsreihe von M (s. a. [35]).

Zur Selbstdualität der einreihigen Ringe wurde von K. R. Fuller und J. K. Haack ([15]) gezeigt, daß jeder einreihige Ring der ersten Kategorie nach Murase ([31]) selbstdual ist. Ein einreihiger Ring gehört zur ersten Kategorie nach Murase, wenn ein primitives Idempotent $e \in R$ existiert, so daß $\mathrm{Rad}({}_RRe) = 0$ ist, d. h., wenn ein einfacher projektiver R- Linksmodul existiert. Desweiteren zeigte J. K. Haack ([16]), daß alle Faktorringe von einreihigen QF- Ringen und von einreihigen Ringen mit strikt aufsteigenden c_i selbstdual sind. Strikt aufsteigende c_i bedeutet: $c_{i+1} = c_i + 1$ für $1 \leqslant i < n$, $c_i := lg({}_RRe_i)$, wobei $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eine Kupischreihe darstellt (s. u.). Außerdem zeigte J. K. Haack, daß einreihige Ringe selbstdual sind, wenn bestimmte Faktorringe spezielle Unterringe von Matrizenringen sind ([18]). Von diesen Ergebnissen wird im folgenden benutzt werden ([16, (3.3) Theorem]):

Jeder einreihige QF- Ring hat eine schwachsymmetrische Selbstdualität.

Daraus folgt mit Korollar 5 zu Satz 1.3 (bzw. nach [16, (4.1) Proposition]):

(3.1) Jeder einreihige QF- Ring hat eine gute Selbstdualität.

Wesentlich für die Untersuchung von einreihigen Ringen sind die primitiven Linksideale und ihre Kompositionsreihen, wie sie von Kupisch ([22]), Murase ([31; 32; 33]) und Fuller ([12]) untersucht worden sind. Kupisch hat für unzerlegbare

einreihige Basisringe gezeigt, daß man die Idempotente so anordnen kann, daß gilt ([22, Satz 5.]):

(3.2) (i) $Re_i/Je_i \cong Je_{i+1}/J^2e_{i+1}$ für $1 \leq i < n$

(ii) $Re_n/Je_n \cong Je_1/J^2e_1$ für $Je_1 \neq 0$

(iii) $c_{[i+1]} \leq c_i + 1$

$c_i := lg({}_R Re_i)$. Mit $[k]$ sei in diesem Kapitel stets die kleinste echt positive Zahl kongruent k modulo n bezeichnet. Man nennt diese Anordnung der Idempotente Kupischreihe. Im folgenden sei stets angenommen, daß die Idempotente eines einreihigen Ringes gemäß der Kupischreihe angeordnet seien.

Bei dieser Anordnung wird, wenn es einen einfachen projektiven R- Linksmodul gibt, die Nummerierung bei jenem Idempotent e begonnen, für das $Je = 0$ gilt. Gilt stets $Je \neq 0$, so ist es bei den zitierten Ergebnissen unerheblicch, bei welchem Idempotent man die Nummerierung beginnt. Deshalb kann in den folgenden Beweisen gelegentlich eine spezielle Wahl zur Vereinfachung getroffen werden.

Desweiteren gilt, daß Re_i genau dann injektiv ist, wenn $c_i + 1 \neq c_{[i+1]}$ ist ([12, (2.5) Theorem]). D. h.:

(3.3) Ein einreihiger Ring R ist genau dann QF- Ring, wenn $c_i = c_j$ ist für alle $1 \leq i,j \leq n$.

([25, Lemma 1.; 22, Folgerung nach Satz 5.]). Murase ([33]) bezeichnet Re_i für $c_i + 1 \neq c_{[i+1]}$ als Kettenende.

Nakayama ([34, Lemma 3.]) hat gezeigt:

(3.4) Ein artinscher Ring R ist genau dann einreihig, wenn R/J^2 einreihig ist.

Im Beweis zu [34, Lemma 3.] hat Nakayama sogar gezeigt:

(3.5) R/J^2 ist einreihiger R/J^2- Linksmodul genau dann, wenn R einreihiger R- Linksmodul ist.

Eisenbud und Griffith ([9, Beweis zu Theorem 2.3]) haben gezeigt, daß die Untermoduln von e_iRe_j als e_iRe_i- Links- und als e_jRe_j- Rechtsmodul identisch sind und daß e_iRe_j als e_iRe_i- Links- und als e_jRe_j- Rechtsmodul lokal und einreihig ist,

d. h.: $\lg(\ {}_{e_iRe_i}\ e_iRe_j\ ) = \lg(\ e_iRe_j\ {}_{e_jRe_j}\ ) =: c_{ij}$.

Für die c_{ij} hat Ivanov gezeigt ([19, Theorem 11]):

(3.6) $c_{ij} - 1 \leq c_{kj} \leq c_{ij} + 1$

$c_{ij} - 1 \leq c_{ik} \leq c_{ij} + 1$

$c_{ij} - 1 \leq c_{jk} \leq c_{ij} + 1$

Außerdem existiert ein s aus $\mathbb{N}$: $c_{ii} \in \{s-1, s\}$,

$c_{ij} \in \{s-2, s-1, s\}$ für alle i,j.

Da e_iRe_j lokaler einreihiger Modul ist, gilt für alle $1 \leq i,j \leq n$: $c_{ii} \geq c_{ij} \leq c_{jj}$.

Ferner gilt gemäß [19, Theorem 11. (ix)]:

(3.7) $$e_iRe_je_jRe_k = \begin{cases} e_iRe_k \text{ für } i \leq j \leq k;\ k < i \leq j;\ j \leq k < i \\ \mathrm{Rad}(e_iRe_k) \text{ für } i \leq k < j;\ j < i \leq k;\ k < j < i. \end{cases}$$

D. h., es gilt: $e_iRe_k = \prod_{j=i}^{k-1} e_jRe_{j+1}$ für $i < k$, bzw. $e_iRe_k = \prod_{j=i}^{k+n-1} e_{[j]}Re_{[j+1]}$ für $i > k$.

Seien $e_{i,[i+1]}$ erzeugende Elemente aus $e_iRe_{[i+1]}$ für alle i fest gewählt. Sei ferner:

(3.8) $$e_{ij} := \prod_{p=i}^{j-1} e_{p,p+1} \text{ für } i < j$$

$$e_{ij} := \prod_{p=i}^{j+n-1} e_{[p],[p+1]} \text{ für } i > j$$

$$e_{jj} := e_j,$$

so hat man erzeugende Elemente für alle e_iRe_j. Sei außerdem noch:

(3.9) $$j_i := \prod_{k=i}^{n+i-1} e_{[k],[k+1]},$$

so hat man darüberhinaus auch noch erzeugende Elemente für die Radikale der lokalen Ringe e_iRe_i. Es gilt:

(3.10) $e_{it}e_{ti} = j_i$ für $i \neq t$

$j_ie_{it} = e_{it}j_t$ für alle i,t.

Denn $j_i = \prod_{k=i}^{n+i-1} e_{[k],[k+1]} = \prod_{k=i}^{t-1} e_{k,k+1} \prod_{p=t}^{n+i-1} e_{[p],[p+1]} =$

$= e_{it}e_{ti}$ für $i < t$, bzw. $j_i = \prod_{k=i}^{n+i-1} e_{[k],[k+1]} =$

$= \prod_{k=i}^{n+t-1} e_{[k],[k+1]} \prod_{p=t}^{i-1} e_{p,p+1} = e_{it}e_{ti}$ für $t < i$. Damit gilt weiter $j_i e_{it} = (e_{it}e_{ti})e_{it} = e_{it}(e_{ti}e_{it}) = e_{it}j_t$ für $i \neq t$. Für $i = t$ ist aber $e_{it} = e_i$.

Definiert man ferner

(3.11) $$d_{ilk} := \begin{cases} e_i \text{ für } i \leq l \leq k;\ k < i \leq l;\ l \leq k < i \\ j_i \text{ für } k < l < i;\ i \leq k < l;\ l < i \leq k, \end{cases}$$

so hat man gemäß (3.7):

$d_{ilk} = e_i \Longleftrightarrow e_iRe_le_lRe_k = e_iRe_k$ bzw.,

$d_{ilk} = j_i \Longleftrightarrow e_iRe_le_lRe_k = \mathrm{Rad}(e_iRe_k)$.

Damit gilt, daß die d_{ilk} unabhängig von der speziell gewählten Kupischreihe sind. Evident ist, daß die $d_{ilk}e_{ik}$ erzeugende Elemente von $e_iRe_le_lRe_k$ sind. Somit gilt weiterhin:

(3.12) $e_{il}e_{lk} = d_{ilk}e_{ik}$, ferner folgt aus $d_{ilk} = j_i$:

$d_{lik} = e_l$ und $d_{ikl} = e_i$.

$e_{i,[i+1]}$ vermittelt einen Epimorphismus von $e_{[i+1]}Re_{[i+1]}$ auf $e_iRe_i/(e_iJe_i)^{(c_{i,[i+1]})}$ vermöge $r \longmapsto s + (e_iJe_i)^{(c_{i,[i+1]})}$ für $se_{i,[i+1]} = e_{i,[i+1]}r$ ($r \in e_{[i+1]}Re_{[i+1]}$, $s \in e_iRe_i$). Sei dieser Epimorphismus mit $e'_{i,[i+1]}$ bezeichnet falls $c_{ii} = c_{i,[i+1]}$, d. h. falls $(e_iJe_i)^{(c_{i,[i+1]})} = 0$ ist. Es gilt dann: $e_{i,[i+1]}r = e'_{i,[i+1]}(r)e_{i,[i+1]}$.

(3.13) Gilt $c_{[l],[l]} = c_{[l],[l+1]}$ für alle $i \leq l < j$, falls $i < j$, bzw. für alle $i \leq l < j + n$ falls $i > j$, so sei analog zu e_{ij} e'_{ij} als Produkt der $e'_{[l],[l+1]}$ definiert. Sei ferner $e'_{ii} := \mathrm{id}_{e_iRe_i}$.

Daraus folgt direkt mit (3.11):

(3.14) Existieren e'_{il}, e'_{lk}, so folgt aus $d_{ilk} = e_i$, daß auch e'_{ik} existiert und $e'_{il}e'_{lk} = e'_{ik}$ ist.

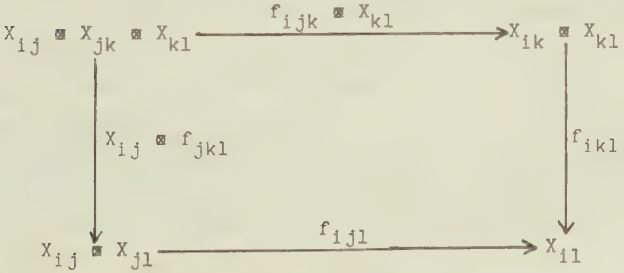
Im weiteren gilt:

(3.15) $e_{ij}\, r = e'_{ij}(r)\, e_{ij}$ falls e'_{ij} existiert.

Denn $e_{ij}r = e_{i,[i+1]}e_{[i+1],[i+2]}\cdots e_{[j-1],j}r = e_{i,[i+1]}$ $e_{[i+1],[i+2]}\cdots e'_{[j-1],j}(r)e_{[j-1],j} = \cdots = e'_{i,[i+1]}e'_{[i+1],[i+2]}\cdots$ $\cdots e'_{[j-1],j}(r)e_{i,[i+1]}e_{[i+1],[i+2]}\cdots e_{[j-1],j} = e'_{ij}(r)e_{ij}$.

In den folgenden Beweisen soll zu einem gegebenen einreihigen Ring ein zweiter konstruiert werden. Der zweite Ring soll dabei von guter Dualität sein und der erste Ring isomorph zu einem Faktorring des zweiten Ringes. Um dies zu können, braucht man noch ein Ergebnis von B. J. Müller ([29] bzw. [30]):

(3.16) Es gibt für jeden semiperfekten Ring R ein System (A_i, X_{ij}, f_{ijk}) mit A_i lokaler Ring, X_{ij} A_i- A_j- Bimodul und Bimodulhomomorphismen $f_{ijk}\colon X_{ij} \otimes X_{jk} \longrightarrow X_{ik}$. Dabei sind alle Indizes aus derselben endlichen Indexmenge I. Für die f_{ijk} gilt: $f_{ikl}(f_{ijk} \otimes X_{kl}) = f_{ijl}(X_{ij} \otimes f_{jkl})$. D. h., das Diagramm



ist kommutativ für alle i, j, k, l aus I.

Man erhält dieses System für einen semiperfekten Ring R mit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ einer vollständigen Menge paarweise orthogonoler primitiver Idempotente wie folgt:

Man definiert $A_i := e_iRe_i$, $X_{ij} := e_iRe_j$, für f_{ijk}: $X_{ij} \otimes X_{jk} \longrightarrow X_{ik}$ setzt man $x_{ij} \otimes x_{jk} \longmapsto x_{ij}x_{jk}$.

Umgekehrt stellt jedes solche System einen semiperfekten Ring dar.

Der Beweis des Satzes 3.3 ist in zwei Lemmata aufgeteilt: Im ersten werden die einreihigen Ringe betrachtet, für die $c_{ii} = c_{i,[i+1]}$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt, im zweiten werden die restlichen einreihigen Ringe betrachtet.

Lemma 3.1

Jeder einreihige Ring, für den $c_{ii} = c_{i,[i+1]}$ (d. h. $n \neq c_i - 1$) für alle $1 \leq i \leq n$ gilt, hat eine gute Dualität.

Beweis:

R sei o. B. d. A. unzerlegbarer einreihiger Basisring. Enthält R nur ein Idempotent, so ist R lokaler einreihiger Ring, speziell einreihiger QF- Ring. Dann ist mit (3.1) bereits alles gezeigt. Man kann also im weiteren außerdem o. B. d. A. annehmen, daß R mindestens zwei primitive orthogonale Idempotente besitzt.

Da $c_{ii} \neq 0$ ist, folgt natürlich $c_{i,[i+1]} \neq 0$ und damit $e_i Re_{[i+1]} \neq 0$. Da R Basisring ist, ist nach Lemma 1.1 a) $e_i Re_{[i+1]}$ in J enthalten, d. h. $Je_{[i+1]} \neq 0$ für alle i. Also kann man gemäß den Vorbemerkungen bei der Indizierung den Anfang frei wählen.

Da $c_{ii} \geq c_{ki}$ ist für alle k, folgt: $c_{ii} = c_{i,[i+1]} \leq$ $\leq c_{[i+1],[i+1]}$ für alle i. Damit erhält man induktiv: $c_{ii} =$ $= c_{jj}$ $(= c_{j,[j+1]})$ für alle i, j. Somit ist in diesem Fall $e'_{i,[i+1]}$ für jedes i definiert und darüberhinaus sogar Isomorphismus von $e_{[i+1]} Re_{[i+1]}$ auf $e_i Re_i$. Damit gilt: $e_i Re_i \cong$ $\cong e_j Re_j$ für alle i,j.

Zu R wird nun nach (3.16) ein einreihiger QF- Ring S so konstruiert, daß R isomorph zu einem Faktorring von S ist: Sei S vorgegeben durch (A_i, X_{ij}, f_{ijk}), wobei alle Indizes von 1 bis n laufen, mit $A_i := e_i Re_i$, $X_{ij} := e_i Re_i$. Dabei trage X_{ij} die durch die Multiplikation in $e_i Re_i$ bedingte Linksmodulstruktur. Ferner wird X_{ij} vermöge $e_i re_i \; e_j se_j := e_i re_i e'_{ij} (e_j se_j) \; e_j Re_j$-

Rechtsmodul. Trivialerweise ist X_{ij} damit e_iRe_i- e_jRe_j- Bimodul. Die f_{ijk} seien definiert durch:

$$f_{ijk}(e_ire_i \otimes e_jse_j) := e_ire_i \cdot e'_{ij}(e_jse_j)\cdot d_{ijk}.$$

(Gilt i = j = k, so stellt f_{ijk} die Ringmultiplikation in e_iRe_i dar, gilt i = j ≠ k bzw. i ≠ j = k, so stellt f_{ijk} die Links- bzw. Rechtsmodulstruktur von X_{jk} bzw. X_{ij} dar.)

Die f_{ijk} sind Bimodulhomomorphismen: Daß f_{ijk} Homomorphismus bzgl. der Linksmodulstruktur ist, folgt direkt aus der Definition. Für die Rechtsmodulstruktur gilt:

$f_{ijk}(e_ite_i \otimes e_jse_j)\, e_kre_k = (e_ite_i\cdot e'_{ij}(e_jse_j)\cdot d_{ijk})\cdot e_kre_k =$

$= e_ite_i\, e'_{ij}(e_jse_j)\, d_{ijk}\, e'_{ik}(e_kre_k).$

$f_{ijk}(\,(e_ite_i \otimes e_jse_j)\cdot e_kre_k\,) = f_{ijk}(e_ite_i \otimes e_jse_j\cdot e'_{jk}(e_kre_k)) =$

$= e_ite_i\cdot e'_{ij}(\,e_jse_j\cdot e'_{jk}(e_kre_k)\,)\cdot d_{ijk} = e_ite_i\cdot e'_{ij}(e_jse_j)\cdot$

$e'_{ij}\cdot e'_{jk}(e_kre_k)\cdot d_{ijk}.$

Somit ist f_{ijk} Bimodulhomomorphismus, falls $e'_{ij}\, e'_{jk}(e_kre_k)d_{ijk} =$

$= d_{ijk}\, e'_{ik}(e_kre_k)$ ist.

Gilt $d_{ijk} = j_i$, so gilt i ≠ j nach (3.11) und damit $j_i =$

$= e_{ij}e_{ji}$ nach (3.10). Ferner gilt nach (3.12) $d_{jik} = e_j$ und

damit folgt aus (3.14) $e'_{ji}e'_{ik} = e'_{jk}$ bzw. $e'_{ik} = e'^{-1}_{ji}e'_{jk}$.

Damit hat man:

$d_{ijk}\, e'_{ik}(e_kre_k) = e_{ij}e_{ji}e'_{ik}(e_kre_k) = e_{ij}e_{ji}e'^{-1}_{ji}e'_{jk}(e_kre_k) =$

$= e_{ij}e'_{jk}(e_kre_k)e_{ji} = e'_{ij}e'_{jk}(e_kre_k)e_{ij}e_{ji} = e'_{ij}e'_{jk}(e_kre_k)d_{ijk}.$

Gilt $d_{ijk} = e_i$, so gilt nach (3.14) $e'_{ij}e'_{jk} = e'_{ik}$ also gilt:

$d_{ijk}e'_{ik}(e_kre_k) = e_ie'_{ik}(e_kre_k) = e'_{ij}e'_{jk}(e_kre_k)e_i =$

$e'_{ij}e'_{jk}(e_kre_k)d_{ijk}$. D. h., es gilt stets:

(3.17) $d_{ijk}e'_{ik}(e_kre_k) = e'_{ij}e'_{jk}(e_kre_k)d_{ijk}.$

Somit ist f_{ijk} Bimodulhomomorphismus.

Damit S Ring ist verbleibt zu zeigen (Es sei $X_{ii} := A_i$):

$$f_{ijl}(X_{ij} \otimes f_{jkl}) = f_{ikl}(f_{ijk} \otimes X_{kl}).$$

Es gilt:

$f_{ijl}(X_{ij} \boxtimes f_{jkl})(\, e_i t e_i \boxtimes e_j s e_j \boxtimes e_k r e_k \,) =$

$= f_{ijl}(e_i t e_i \boxtimes e_j s e_j e'_{jk}(e_k r e_k) d_{jkl}) =$

$= e_i t e_i e'_{ij}(\, e_j s e_j e'_{jk}(e_k r e_k) d_{jkl} \,) d_{ijl} =$

$= e_i t e_i e'_{ij}(e_j s e_j) \cdot e'_{ij} e'_{jk}(e_k r e_k) e'_{ij}(d_{jkl}) \cdot d_{ijl}.$

Andererseits gilt:

$f_{ikl}(f_{ijk} \boxtimes X_{kl})(\, e_i t e_i \boxtimes e_j s e_j \boxtimes e_k r e_k \,) =$

$= f_{ikl}(\, e_i t e_i \, e'_{ij}(e_j s e_j) d_{ijk} \boxtimes e_k r e_k \,) =$

$= e_i t e_i \cdot e'_{ij}(e_j s e_j) d_{ijk} \cdot e'_{ik}(e_k r e_k) d_{ikl} \overset{(3.17)}{=\!=}$

$= e_i t e_i \cdot e'_{ij}(e_j s e_j) \cdot e'_{ij} e'_{jk}(e_k r e_k) d_{ijk} d_{ikl}.$

Es verbleibt also zu zeigen: $d_{ijk} d_{ikl} = e'_{ij}(d_{jkl}) d_{ijl}.$

Man kann dies einsehen, wenn man alle möglichen Fälle von Indizes durchrechnet. Man kann diese Arbeit etwas vereinfachen, wenn man sich überlegt, daß sowohl $d_{ijk}d_{ikl}$, als auch $e'_{ij}(d_{jkl})d_{ijl}$ nur die Werte $j_i^0 := e_i$, j_i, j_i^2 annehmen kann.

i) Gilt $j_i e_{il} \neq 0$, so folgt aus der Assoziativität in R und aus (3.12): $d_{ijk}d_{ikl}e_{il} = d_{ijk}e_{ik}e_{kl} = e_{ij}e_{jk}e_{kl} =$

$= e_{ij}d_{jkl}e_{jl} = e'_{ij}(d_{jkl})e_{ij}e_{jl} = e'_{ij}(d_{jkl})d_{ijl}e_{il}.$

Aber da $j_i^0 e_{il} \neq j_i e_{il} \neq j_i^2 e_{il} \neq j_i^0 e_{il}$ ist, folgt die gewünschte Gleichheit.

ii) Gilt $e_{il} \neq 0 = j_i e_{il}$, so folgt aus der Assoziativität von $e_{ij}e_{jk}e_{kl}$: $d_{ijk}d_{ikl}$ ist genau dann e_i, wenn dies für $e'_{ij}(d_{jkl})d_{ijl}$ gilt. Gilt darüberhinaus $j_i = j_i^2 = 0$, so ist man fertig. Es gelte also $j_i \neq j_i^2$ $(= 0)$. Ferner nehme man o. B. d. A. an, daß i unter den vier Indizes i, j, k, l maximal ist. Dann gilt nach (3.11): $d_{ijk}d_{ikl} = j_i^2 \Leftrightarrow i > j > k$ und $i > k > l \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow i > j > k > l \Leftrightarrow j > k > l$ und $i > j > l \Leftrightarrow e'_{ij}(d_{jkl}) = j_i$ und $d_{ijl} = j_i \Leftrightarrow e'_{ij}(d_{jkl})d_{ijl} = j_i^2$. Damit hat man insgesamt für $t \in \{0, 1, 2\}$: $e'_{ij}(d_{jkl})d_{ijl} = j_i^t \Leftrightarrow d_{ijk}d_{ikl} = j_i^t$.

iii) Gilt $e_{il} = 0$, so folgt aus (3.6): $c_{ii} \leqslant 1$, da $e_i R e_i \neq$

$\neq 0$ ist, folgt sogar: $c_{ii} = 1$. Damit kann $d_{ijk}d_{ikl}$ bzw. $e'_{ij}(d_{jkl})d_{ijl}$ nur die Werte e_i oder 0 annehmen. Man nehme diesmal o. B. d. A. an, daß i minimal ist. Dann gilt nach (3.11): $d_{ijk}d_{ikl} = e_i \Leftrightarrow i \leq j \leq k$ und $i \leq k \leq l \Leftrightarrow i \leq j \leq k \leq l \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow j \leq k \leq l$ und $i \leq j \leq l \Leftrightarrow e'_{ij}(d_{jkl}) = e_i$ und $d_{ijl} = e_i \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e'_{ij}(d_{jkl})d_{ijl} = e_i$. Damit gilt auch in diesem Fall die gewünschte Gleichheit $d_{ijk}d_{ikl} = e'_{ij}(d_{jkl})d_{ikl}$, und also ist S semiperfekter Ring.

Da $A_i = e_iRe_i$ semiprimär ist für alle $1 \leq i \leq n$, folgt nach [1, 28.11. Proposition], daß auch S semiprimär ist. Die Elemente aus S sind Matrizen der Form $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit x_{ij} aus X_{ij}. Setzt man $E_{ij} := (d_{pq})_{1 \leq p,q \leq n}$ mit $d_{pq} = e_i$ für $p = i$, $q = j$ und $d_{pq} = 0$ sonst, so ist $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}$. Die E_{ii} sind dann die primitiven Idempotente von S.

S ist Basisring: Nach [1, 4.6. Proposition und 4.7. Corollary] ist $E_{ii}SE_{jj}$ zu $\mathrm{Hom}_S(SE_{ii}, SE_{jj})$ als $E_{ii}SE_{ii}$- $E_{jj}SE_{jj}$-Bimodul vermöge $f(E_{ii}sE_{jj})(rE_{ii}) := rE_{ii}sE_{jj}$ isomorph. Angenommen SE_{ii} ist zu SE_{jj} isomorph mit $i \neq j$. Dann gibt es also ein r aus e_iRe_i, ein r' aus e_jRe_j, so daß die Isomorphie durch $sE_{ii} \longmapsto srE_{ij}$, bzw. ihre Umkehrung durch $sE_{jj} \longmapsto sr'E_{ji}$ dargestellt wird. Aber da $E_{ij}E_{ji} = E_{ii}d_{iji} = E_{ii}j_i$ ist, stellt die Hintereinanderausführung der Isomorphie und ihrer Umkehrung nicht die Identität dar. Widerspruch! Also ist S Basisring.

Sei $F:S \longrightarrow R$ definiert durch $\sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}E_{ij} \longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}e_{ij}$ für $s_{ij} \in e_iRe_i$. F ist trivialerweise surjektiver Gruppenhomomorphismus der den Ringen zu Grunde liegenden abelschen Gruppen. F ist aber auch multiplikativ:
$F(s_{ij}E_{ij} \cdot r_{jk}E_{jk}) = F(s_{ij}e'_{ij}(r_{jk})d_{ijk}E_{ik}) = s_{ij}e'_{ij}(r_{jk}) \cdot$
$d_{ijk}e_{ik} = s_{ij}e'_{ij}(r_{jk})e_{ij}e_{jk} = s_{ij}e_{ij} \cdot r_{jk}e_{jk} = F(s_{ij}E_{ij}) \cdot$

$F(r_{jk}E_{jk})$. Somit ist R isomorph zu einem Faktorring von S.

Sei jetzt $0 \neq a \in \ker F$. Da $\ker F$ zweiseitiges Ideal in S ist, kann man o. B. d. A. annehmen, daß $a = rE_{ik}$ ist mit r aus $e_i R e_i$. Es muß gelten: $re_{ik} = 0$. Damit folgt, daß $c_{ik} < c_{ii}$ ist. Da aber $c_{i,[i+1]} = c_{ii}$ ist, folgt $i \neq k \neq [i+1]$. Damit gilt nach (3.8) $e_{i,[i+1]}e_{[i+1],k} = e_{ik}$ bzw. $E_{i,[i+1]} \cdot E_{[i+1],k} = E_{ik}$ nach (3.12). Da S Basisring ist, folgt aus Lemma 1.1 a) , daß $rE_{i,[i+1]}$, $E_{[i+1],k} \in \mathrm{Rad}(S)$ sind, denn es ist $E_{i,[i+1]} \neq E_{ii}$, $E_{[i+1],k} \neq E_{kk}$, d. h.: $rE_{ik} \in (\mathrm{Rad}(S))^2$. Damit hat man gezeigt: $\ker F \subset (\mathrm{Rad}(S))^2$, daraus folgt:

$$S/(\mathrm{Rad}(S))^2 \cong (S/\ker F) \,/\, ((\mathrm{Rad}(S))^2/\ker F) \cong R/J^2.$$

Da R einreihig ist, ist auch R/J^2 einreihig. Damit ist aber auch $S/(\mathrm{Rad}(S))^2$ einreihig und endlich auch S nach (3.4): Denn da $\lg(E_{ii}SE_{ii}\, E_{ii}SE_{jj}) = c_{ii}$ ist, folgt: $\lg({}_SSE_{ii}) = n \cdot c_{ii}$ bzw. $\lg({}_SS) = n^2 c_{ii}$. Daraus folgt, daß S linksartinsch ist. Analog folgt, daß S rechtsartinsch ist. Also läßt sich (3.4) anwenden.

Ferner folgt, da alle c_{ii} gleich sind, daß $\lg({}_SSE_{ii}) = \lg({}_SSE_{jj})$ für alle $1 \leq i,j \leq n$ ist. Dies zieht gemäß (3.3) nach sich, daß S einreihiger QF- Ring ist. Mit (3.1) hat somit S eine gute Dualität und damit auch R nach Korollar 3 zu Satz 1.3.

q.e.d.

Lemma 3.2

Ist R einreihiger Ring, gilt für mindestens ein i, daß $c_{ii} \neq c_{i,[i+1]}$ ist, so ist R Ring mit guter Selbstdualität.

Beweis:

Sei wieder R o. B. d. A. unzerlegbarer Basisring. Da aus $c_{ii} \neq c_{i,[i+1]}$ folgt, daß $e_i R e_i \neq e_i R e_{[i+1]}$ ist, folgt, daß es in R mindestens zwei orthogonale primitive Idempotente gibt. Sei

(3.18) $N := \{ j \mid c_{jj} \neq c_{j,[j+1]} \}$.

Sei ferner die Anordnung der Idempotente so gewählt, daß n in N liegt. Im Fall $Je_1 = 0$, in dem man den Anfang der Indizierung nicht frei wählen kann, gilt $e_n Re_1 = 0$. Somit ist $c_{n1} = 0 \neq c_{nn}$, d. h., auch in diesem Fall liegt n in N.

Seien die Elemente aus N der Größe nach durchnummeriert: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k = n$ und sei $n_0 := 0$. Es gilt:

(3.19) Für n_i aus N ist $c_{n_i n_i}$ maximal unter den c_{ll}.

Angenommen es existiert ein $c_{ll} > c_{n_i n_i}$. Nach (3.6) folgt dann $c_{ll} = c_{n_i n_i} + 1$. Da $c_{n_i,[n_i+1]} \neq c_{n_i n_i}$ nach (3.6) bedingt, daß $c_{n_i n_i} = c_{n_i,[n_i+1]} + 1$ ist, folgt für $l = [n_i+1]$: $c_{ll} = c_{n_i n_i} + 1 = c_{n_i,[n_i+1]} + 2 = c_{n_i l} + 2$. Widerspruch zu (3.6)!

Gilt $l \neq [n_i+1]$, so ist $e_l Re_{[n_i+1]} = e_l Re_{n_i} e_{n_i} Re_{[n_i+1]} = e_{ln_i} e_{n_i} Re_{[n_i+1]}$. Also gilt $lg(e_l Re_{[n_i+1]}) \leq lg(e_{n_i} Re_{[n_i+1]})$, da dieses lokale einreihige $e_{[n_i+1]} Re_{[n_i+1]}$- Rechtsmoduln sind. D. h.: $c_{l,[n_i+1]} \leq c_{n_i,\, n_i+1} = c_{n_i n_i} - 1 = c_{ll} - 2$. Widerspruch zu (3.6)!

Also gilt $c_{n_i n_i} \geq c_{ll}$ für alle l. D. h., sind n_i, n_j aus N, so ist $c_{n_i n_i} \geq c_{n_j n_j} \geq c_{n_i n_i}$, damit gilt: $c_{n_i n_i} = c_{n_j n_j}$ für alle i, j. Da für $l \neq n_i$ $e_{n_i} Re_l = e_{n_i} Re_{[n_i+1]} e_{[n_i+1]} Re_l = e_{n_i} Re_{[n_i+1]} e_{[n_i+1],l}$ ist, ist nach (3.6) $c_{n_i n_i} - 1 \leq c_{n_i l} \leq c_{n_i,[n_i+1]} = c_{n_i n_i} - 1$. Also gilt:

(3.20) $c_{n_i t} = c_{n_i n_i} - 1$ für $n_i \neq t$.

Sei $B := (\sum_{i=1}^{k} e_{n_i})R(\sum_{j=1}^{k} e_{n_j}) = \sum_{i,j=1}^{k} e_{n_i} Re_{n_j}$. B ist einreihiger Unterring (nicht bzgl. der 1!) von R und es gilt:

$$lg({}_B Be_{n_i}) = \sum_{j=1}^{k} lg(e_{n_j} Re_{n_i}) = \sum_{j=1}^{k} c_{n_j n_i} = (k-1)(c_{n_i n_i} - 1) +$$

$+ c_{n_i n_i} = (k-1)(c_{n_j n_j}-1) + c_{n_j n_j} = lg({}_B Be_{n_j})$. Somit ist nach (3.3) B einreihiger QF- Ring. Damit ist B nach (3.1) von guter Dualität.

Sei T_{jj} der (n_j-n_{j-1})- reihige Matrizenring über $e_{n_j} Re_{n_j}$, T_{ij} der Modul der (n_i-n_{i-1})- zeiligen und (n_j-n_{j-1})- spaltigen Matrizen über $e_{n_i} Re_{n_j}$. Sei dann

$$T := \begin{pmatrix} T_{11}\cdots & \cdots T_{1k} \\ \cdots & \cdots \\ & \\ \cdots & \cdots \\ T_{k1}\cdots & \cdots T_{kk} \end{pmatrix}.$$

T ist also der k- reihige Matrizenring mit Elementen aus T_{ij} an der (i,j)- ten Stelle. Da T zum Endomorphismenring $End_B(Be_{n_1}{}^{n_1} \oplus Be_{n_2}{}^{(n_2-n_1)} \oplus \ldots \oplus Be_{n_k}{}^{(n_k-n_{k-1})})$ isomorph ist, ist T zu B Morita- äquivalenter Ring. Also ist T einreihig. Gemäß Korollar 4 zu Satz 1.3 ist damit T von guter Dualität.

Sei S Unterring von T wie folgt konstruiert:

$$S := \begin{pmatrix} S_{11}\cdots & \cdots S_{1k} \\ \cdots & \cdots \\ & \\ \cdots & \cdots \\ S_{k1}\cdots & \cdots S_{kk} \end{pmatrix}$$

Wobei $S_{ij} := T_{ij}$ für $i \neq j$ sei. S_{ii} sei:

$$S_{ii} := \begin{pmatrix} e_{n_i} Re_{n_i}\cdots & \cdots e_{n_i} Re_{n_i} \\ \ddots & \vdots \\ & \\ & \ddots \ \vdots \\ e_{n_i} Je_{n_i} & e_{n_i} Re_{n_i} \end{pmatrix}.$$

S_{ii} ist also der Unterring von T_{ii}, der unterhalb der Hauptdiagonalen nur noch Elemente aus $e_{n_i} Je_{n_i}$ enthält. Da für $i \neq j$ $e_{n_i} Re_{n_j} e_{n_j} Re_{n_i} = e_{n_i} Je_{n_i}$ ist, folgt aus der Konstruktion der S_{ii} sofort, daß S Unterring von T ist. Für jedes $E_{tt} e_{n_i n_i} \in \in T_{ii}$ gilt: $E_{tt} e_{n_i n_i} T E_{tt} e_{n_i n_i} \subset S$. Somit ist S HDE- Unterring von T. S ist also Ring von guter Dualität.

Es verbleibt zu zeigen: R ist Faktorring von S.
Sei zuerst einmal der Fall $c_{n_j n_j} = 1$ betrachtet. Aus den Bedingungen der Kupischreihe (3.2) folgt, daß $Re_i/Je_i \cong$ $\cong Je_{i+1}/J^2 e_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ ist. Daraus folgt, daß $e_i Re_{i+1} \neq$ $\neq 0$ ist für $1 \leq i < n$. Somit ist $c_{i,i+1} \geq 1 = c_{n_j n_j}$ für $i \neq n$. Also kann es im Fall $c_{n_j n_j} = 1$ nur ein Element in N geben. Dieses ist n. S ist dann oberer Dreiecksmatrizenring über $e_n Re_n$.

Daß R in diesem Fall Faktorring von S ist, wurde bereits von Murase ([31, Theorem 17 und Theorem 18]) bewiesen. Allgemeiner wurde dies einschließlich der Selbstdualität in diesem Fall von Fuller und Haack ([15, Theorem 4; 16, (4.4) Theorem]) gezeigt. Somit hat R in diesem Fall gute Selbstdualität.

Für $c_{n_j n_j} \geq 2$ gilt $c_{n_i n_j} = c_{n_j n_j} - 1 \geq 1$ für $i \neq j$, bzw. $lg(e_{n_i} Je_{n_i}) = c_{n_j n_j} - 1 \geq 1$. D. h. also: Durch $de_{n_i n_p} = e_{n_i n_p} b$ für $i \neq p$ bzw. durch $dj_{n_p} = j_{n_p} b$ wird b nur bis auf $Soc(e_{n_p} Re_{n_p})$ durch d bestimmt. Betrachtet man jetzt $e_{n_i} Re_{n_p}$ bzw. $e_{n_p} Je_{n_p}$ nicht nur als $e_{n_p} Re_{n_p}$-, sondern auch als $e_{n_p} Re_{n_p}/Soc(e_{n_p} Re_{n_p})$-Rechtsmodul (und analog als Linksmodul), so kann man $f_{ip}: e_{n_i} Re_{n_i} \longrightarrow e_{n_p} Re_{n_p}/Soc(e_{n_p} Re_{n_p})$ definieren durch:

(3.21) $de_{n_i n_p} = e_{n_i n_p} f_{ip}(d)$ für $i \neq p$

$dj_{n_p} = j_{n_p} f_{pp}(d)$.

Ist $n_{p-1} < t \leq n_p$ und ist $t \neq n_i$, so ist $c_{n_i n_i} - 1 = c_{n_i t}$ nach (3.20). Damit ist aber auch $0 = e_{n_i} Re_t (e_t Je_t)^{(c_{n_i n_i} - 1)} =$

$= e_{n_i} Re_t e'_{tn_p} ((e_{n_p} Je_{n_p})^{(c_{n_p n_p} - 1)}) = e_{n_i} Re_t e'_{tn_p} (Soc(e_{n_p} Re_{n_p}))$.

Also läßt sich $e''_{tn_p} : e_{n_p} Re_{n_p} / Soc(e_{n_p} Re_{n_p}) \longrightarrow$

$e_t Re_t / (e_t Je_t)^{(c_{n_p n_p} - 1)}$ durch $e''_{tn_p}(e_{n_p} re_{n_p} + Soc(e_{n_p} Re_{n_p})) :=$

$:= e'_{tn_p}(e_{n_p} re_{n_p}) + (e_t Je_t)^{(c_{n_p n_p} - 1)}$ definieren und es gilt,

daß $e_{n_i} Re_t$ durch $e_{n_i} re_t e''_{tn_p} (e_{n_p} se_{n_p} + Soc(e_{n_p} Re_{n_p}))$

für $e_{n_p} se_{n_p} + Soc(e_{n_p} Re_{n_p})$ aus $e_{n_p} Re_{n_p} / Soc(e_{n_p} Re_{n_p})$

$e_{n_p} Re_{n_p} / Soc(e_{n_p} Re_{n_p})$- Rechtsmodul wird. Man kann jetzt

$e_{n_i t} e''_{tn_p} \circ f_{ip}(e_{n_i} re_{n_i})$ betrachten. Trivialerweise gilt:

(3.22) $e_{n_i t} e''_{tn_p} \circ f_{ip}(e_{n_i} re_{n_i}) \cdot e'_{tn_p}(e_{n_p} se_{n_p}) =$

$= e_{n_i t} e''_{tn_p} (f_{ip}(e_{n_i} re_{n_i}) e_{n_p} se_{n_p})$

für $n_{p-1} < t \leq n_p$, $n_i \neq t$; sowie

$e_{n_i t} e''_{tn_p} (e_{n_p} re_{n_p} + Soc(e_{n_p} Re_{n_p})) e_{tn_p} =$

$= e_{n_i t} e_{tn_p} (e_{n_p} re_{n_p} + Soc(e_{n_p} Re_{n_p})) = \begin{cases} j_{n_p} e_{n_p} re_{n_p} & \text{für } i = p \\ e_{n_i n_p} e_{n_p} re_{n_p} & \text{für } i \neq p \end{cases}$

Dabei operiere $e_{n_p} Re_{n_p}$ auf $e_{n_p} Re_{n_p} / Soc(e_{n_p} Re_{n_p})$ wie üblich vermöge $(e_{n_p} re_{n_p} + Soc(e_{n_p} Re_{n_p})) e_{n_p} se_{n_p} = e_{n_p} re_{n_p} e_{n_p} se_{n_p} +$ $+ Soc(e_{n_p} Re_{n_p})$.

Desweiteren gilt $e_{n_i} re_{n_i} e_{n_i t} = e_{n_i t} e''_{tn_p} f_{ip}(e_{n_i} re_{n_i})$ für

$n_{p-1} < t \leq n_p$, $n_p \neq t$. Es ist $c_{n_i n_i} - 1 = c_{n_i t} =$
$= lg(e_{n_i} Re_t e_{tn_p})$, wobei $e_{n_i} Re_t e_{tn_p}$ gleich $Pad(e_{n_p} Re_{n_p})$
für $e_{n_i t} e_{tn_p} = j_{n_p}$ ist, bzw. gleich $e_{n_i} Re_{n_p}$ für $e_{n_i t} e_{tn_p} =$
$= e_{n_i n_p}$ ist. D. h., $ann_{e_{n_i} Re_t}(e_{tn_p}) = 0$. Damit folgt:

$e_{n_i t} e''_{tn_p} f_{ip}(e_{n_i} re_{n_i}) e_{tn_p} \overset{(3.22)}{=\!=} e_{n_i t} e_{tn_p} f_{ip}(e_{n_i} re_{n_i}) \overset{(3.21)}{=\!=}$
$= e_{n_i} re_{n_i} e_{n_i t} e_{tn_p}$. D. h.: $e_{n_i} re_{n_i} e_{n_i t} = e_{n_i t} e''_{tn_p} f_{ip}(e_{n_i} re_{n_i})$

Zusammen mit (3.22) erhält man:

(3.23) $de_{n_i t} e'_{tn_p}(b) = e_{n_i t} e''_{tn_p}(f_{ip}(d) \cdot b)$ für $n_{p-1} < t \leq n_p$,
$t \neq n_i$, $d \in e_{n_i} Re_{n_i}$ und $b \in e_{n_p} Re_{n_p}$.

Weiterhin folgt aus $j_t e_{tn_p} = e_{tn_p} j_{n_p}$ (3.9):

(3.24) $j_t = e'_{tn_p}(j_{n_p})$ für $n_{p-1} < t \leq n_p$.

Da nach den Vorbemerkungen zu (3.23) für $n_{p-1} < t \leq n_p$
$e_t Je_t \; e_{n_p} Re_{n_p} / Soc(e_{n_p} Re_{n_p})$- Modul ist, ist $j_t e''_{tn_p}(f_{ip}(d))$
wohldefiniert und aus $e_t Je_t$. Es gilt für $t = n_p$: $j_t e''_{tn_p} f_{pp}(d) =$
$= j_{n_p} id \cdot f_{pp}(d) = j_{n_p} f_{pp}(d) \overset{(3.21)}{=\!=} dj_{n_p} = e'_{tn_p}(dj_{n_p})$. Für $t \neq n_i$
gilt: $j_t e''_{tn_p} f_{ip}(d) \overset{(3.10)}{=\!=} e_{tn_i} e_{n_i t} e''_{tn_p} f_{ip}(d) \overset{(3.23)}{=\!=}$
$= e_{tn_i} de_{n_i t} \overset{(3.8)}{=\!=} e_{tn_p} e_{n_p n_i} de_{n_i t} = e'_{tn_p}(e_{n_p n_i} de_{n_i t} e_{tn_p})$. Denn
es gilt: $(e_{tn_p} e_{n_p n_i} de_{n_i t}) e_{tn_p} = e_{tn_p}(e_{n_p n_i} de_{n_i t} e_{tn_p})$, woraus
die letzte Gleichung folgt. Für $i = p$ ist $e_{n_p n_i} de_{n_i t} e_{tn_p}$
gleich dj_{n_p}, für $i \neq p$ ist dies gleich $e_{n_p n_i} de_{n_i n_p}$. Damit
hat man erhalten:

(3.25) Sei $n_{p-1} < t \leq n_p$, dann folgt:

$j_t e''_{tn_p}(f_{pp}(d) b) = e'_{tn_p}(dj_{n_p} b)$

$j_t e''_{tn_p}(f_{ip}(d) b) = e'_{tn_p}(e_{n_p n_i} de_{n_i n_p} b)$ für $i \neq p$.

Zur Definition von $F:S \longrightarrow R$ seien die Elementarmatrizen aus den S_{tp} so durchnummeriert, daß in S_{tp} die Indizes der Elementarmatrizen nicht mit (1,1) beginnen, sondern mit $(n_{t-1} + 1, n_{p-1} + 1)$. D. h., daß also $E_{ij} \in S_{tp}$ dann die Indizes $n_{t-1} + i$ statt i und $n_{p-1} + j$ statt j trägt. Die Indizes der E_{ij} laufen nach der Umindizierung von 1 bis n. Da keine Gefahr der Verwechslung besteht, sei außerdem die Matrix aus S, die nach der Umindizierung an der (t,p)- ten Stelle die Elementarmatrix E_{ij} enthält und sonst überall Nullen, mit der Matrix E_{ij} identifiziert.

Sei $F:S \longrightarrow R$ definiert wie folgt ($d \in e_{n_i} R e_{n_i}$):

(3.26) $F(dE_{tq}) := e_{tq} e'_{qn_i}(d)$ für $n_{i-1} < t \leq q \leq n_i$

$F(j_{n_i} dE_{tq}) := e_{tq} e'_{qn_i}(d)$ für $n_{i-1} < q < t \leq n_i$

$F(e_{n_p n_i} dE_{tq}) := e_{tq} e'_{qn_i}(d)$ für $i \neq p$, $n_{p-1} < t \leq n_p$, $n_{i-1} < q \leq n_i$.

Für ein beliebiges Element s aus S erhält man dann F(s) durch aufsummieren. Für F gilt:

(3.27) $e_{tq} e''_{qn_i} \circ f_{ji}(d) = F(e_{n_p n_i} f_{ji}(d) E_{tq})$ für $i \neq p$,

$e_{tq} e''_{qn_i} \circ f_{ji}(d) = F(j_{n_i} f_{ji}(d) E_{tq})$ für $i = p$,

wobei $n_{i-1} < q \leq n_i$, $n_{p-1} < t \leq n_p$, $1 \leq j \leq k$, sowie für $p = i$ $q < t$ gelte.

Denn sowohl $e_{n_p} R e_{n_i}$ für $i \neq p$, $e_{n_i} J e_{n_i}$ für $i = p$, als auch $e_t R e_q$ sind $e_{n_i} R e_{n_i} / \mathrm{Soc}(e_{n_i} R e_{n_i})$- Moduln, der letzte vermöge e''_{qn_i}. Nach (3.7) folgt ferner $e_t R e_q = e_t R e_{[n_{i-1}]} e_{[n_{i-1}]} R e_q$, d. h.: $\lg(e_t R e_q) = c_{n_i n_i} - 1$. Aus dieser Gleichung folgt außerdem für die zweite und dritte Gleichung in (3.26), daß F wohldefiniert ist.

F ist trivialerweise additiver und surjektiver Homomorphismus der abelschen Gruppe S auf die Gruppe R.

F ist auch multiplikativ. Dazu seien entsprechend der Definition von F drei Hauptfälle mit entsprechenden Unterfäl-

len betrachtet (d, b seien aus geeigneten $e_{n_s} Re_{n_s}$):

1.: $n_{i-1} < p \leq q \leq n_i$.

1.1: $n_{i-1} < p \leq q \leq t < n_i$:

$F(dE_{pq})F(bE_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.13)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qt}e'_{tn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qt}e'_{tn_i}(db) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pt}e'_{tn_i}(db) \overset{(3.26)}{=\!=} F(dbE_{pt}) = F((dE_{pq})(bE_{qt}))$

1.2: $n_{i-1} < p \leq t < q \leq n_i$:

$F(dE_{pq})F(j_{n_i}bE_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qn_i}e_{n_it}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_i}de_{n_it}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.23)}{=\!=}$

$= e_{pq}e_{qn_i}e_{n_it}e''_{tn_i}(f_{ii}(d)b) \overset{(3.8)}{=\!=} e_{pt}e_{tq}e_{qn_i}e_{n_it}e''_{tn_i}(f_{ii}(d)b) =$

$\overset{(3.10)}{=\!=} e_{pt}j_te''_{tn_i}(f_{ii}(d)b) \overset{(3.25)}{=\!=} e_{pt}e'_{tn_i}(dj_{n_i}b) \overset{(3.26)}{=\!=}$

$= F(dj_{n_i}bE_{pt}) = F((dE_{pq})(j_{n_i}bE_{qt}))$

1.3: $n_{i-1} < t < p \leq q \leq n_i$:

$F(dE_{pq})F(j_{n_i}bE_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qn_i}e_{n_it}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_i}de_{n_it}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.23)}{=\!=}$

$= e_{pq}e_{qn_i}e_{n_it}e''_{tn_i}(f_{ii}(d)b) \overset{(3.8)}{=\!=} e_{pt}e''_{tn_i}(f_{ii}(d)b) \overset{(3.27)}{=\!=}$

$= F(j_{n_i}f_{ii}(d)bE_{pt}) \overset{(3.21)}{=\!=} F(dj_{n_i}bE_{pt}) = F((dE_{pq})(j_{n_i}bE_{qt}))$

1.4: $n_{j-1} < t \leq n_j \neq n_i$, $n_{i-1} < p \leq q \leq n_i$:

$F(dE_{pq})F(e_{n_in_j}bE_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_j}(b) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qn_i}e_{n_it}e'_{tn_j}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_i}de_{n_it}e'_{tn_j}(b) =$

$\overset{(3.23)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_i}e_{n_it}e''_{tn_j}(f_{ij}(d)b) \overset{(3.8)}{=\!=} e_{pt}e''_{tn_j}(f_{ij}(d)b) =$

$\overset{(3.27)}{=\!=} F(e_{n_in_j}f_{ij}(d)bE_{pt}) \overset{(3.21)}{=\!=} F(de_{n_in_j}bE_{pt}) =$

$= F((dE_{pq})(e_{n_in_j}bE_{qt}))$

2.: $n_{i-1} < q < p \leq n_i$.

2.1: $n_{i-1} < q < p \leq t \leq n_i$:

$F(j_{n_i}dE_{pq})F(bE_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.13)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qt}e'_{tn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qt}e'_{tn_i}(db) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pt}e_{tq}e_{qt}e'_{tn_i}(db) \overset{(3.10)}{=\!=} e_{pt}j_te'_{tn_i}(db) \overset{(3.24)}{=\!=}$

$= e_{pt}e'_{tn_i}(j_{n_i}db) \overset{(3.26)}{=\!=} F(j_{n_i}dbE_{pt}) = F(\ (j_{n_i}dE_{pq})(bE_{qt})\ )$

2.2: $n_{i-1} < q \leq t < p \leq n_i$:

$F(j_{n_i}dE_{pq})F(bE_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.13)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qt}e'_{tn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qt}e'_{tn_i}(db) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pt}e'_{tn_i}(db) \overset{(3.26)}{=\!=} F(j_{n_i}dbE_{pt}) = F(\ (j_{n_i}dE_{pq})(bE_{qt})\ )$

2.3: $n_{i-1} < t < q < p \leq n_i$:

$F(j_{n_i}dE_{pq})F(j_{n_i}bE_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qn_i}e_{n_it}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_i}de_{n_it}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.23)}{=\!=}$

$= e_{pq}e_{qn_i}e_{n_it}e''_{tn_i}(f_{ii}(d)b) \overset{(3.8)}{=\!=} e_{pt}e_{tq}e_{qn_i}e_{n_it}e''_{tn_i}(f_{ii}(d)b) =$

$\overset{(3.10)}{=\!=} e_{pt}j_te''_{tn_i}(f_{ii}(d)b) \overset{(3.25)}{=\!=} e_{pt}e'_{tn_i}(dj_{n_i}b) \overset{(3.26)}{=\!=}$

$= F(j_{n_i}dj_{n_i}bE_{pt}) = F(\ (j_{n_i}dE_{pq})(j_{n_i}bE_{qt})\ )$

2.4: $n_{j-1} < t \leq n_j \neq n_i$, $n_{i-1} < q < p \leq n_i$:

$F(j_{n_i}dE_{pq})F(e_{n_in_j}bE_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qt}e'_{tn_j}(b) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qn_i}(d)e_{qn_i}e_{n_it}e'_{tn_j}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_i}de_{n_it}e'_{tn_j}(b) \overset{(3.23)}{=\!=}$

$= e_{pq}e_{qn_i}e_{n_it}e''_{tn_j}(f_{ij}(d)b) \overset{(3.8)}{=\!=} e_{pt}e_{tq}e_{qn_i}e_{n_it}e''_{tn_j}(f_{ij}(d)b) =$

$\overset{(3.10)}{=\!=} e_{pt}j_te''_{tn_j}(f_{ij}(d)b) \overset{(3.25)}{=\!=} e_{pt}e'_{tn_j}(e_{n_jn_i}de_{n_in_j}b) =$

$\overset{(3.26)}{=\!=} F(e_{n_in_j}e_{n_jn_i}de_{n_in_j}bE_{pt}) \overset{(3.10)}{=\!=} F(\ (j_{n_i}dE_{pq})(e_{n_in_j}bE_{qt})\ )$

3.: $n_{i-1} < p \leq n_i$, $n_{j-1} < q \leq n_j \neq n_i$.

3.1: $n_{i-1} < p \leq t \leq n_i$, $n_{j-1} < q \leq n_j \neq n_i$:

$F(e_{n_in_j}dE_{pq})F(e_{n_jn_i}bE_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qn_j}e_{n_jt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_j}de_{n_jt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.23)}{=\!=}$

$= e_{pq}e_{qn_j}e_{n_jt}e''_{tn_i}(f_{ji}(d)b) \overset{(3.8)}{=\!=} e_{pt}e_{tq}e_{qn_j}e_{n_jt}e''_{tn_i}(f_{ji}(d)b) =$

$\overset{(3.10)}{=\!=} e_{pt}j_te''_{tn_i}(f_{ji}(d)b) \overset{(3.25)}{=\!=} e_{pt}e'_{tn_i}(e_{n_in_j}de_{n_jn_i}b) =$

$\overset{(3.26)}{=\!=} F(e_{n_in_j}de_{n_jn_i}bE_{pt}) = F(\ (e_{n_in_j}dE_{pq})(e_{n_jn_i}bE_{qt})\ )$

3.2: $n_{i-1} < t < p \leq n_i$, $n_{j-1} < q \leq n_j \neq n_i$:

$F(e_{n_in_j}{}^{dE}{}_{pq})F(e_{n_jn_i}{}^{bE}{}_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qn_j}e_{n_jt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_j}{}^{de}{}_{n_jt}e'_{tn_i}(b) \overset{(3.23)}{=\!=}$

$= e_{pq}e_{qn_j}e_{n_jt}e''_{tn_i}(f_{ji}(d)b) \overset{(3.8)}{=\!=} e_{pt}e''_{tn_i}(f_{ji}(d)b) \overset{(3.27)}{=\!=}$

$= F(j_{n_i}f_{ji}(d)bE_{pt}) \overset{(3.10)}{=\!=} F(e_{n_in_j}e_{n_jn_i}f_{ji}(d)bE_{pt}) =$

$\overset{(3.21)}{=\!=} F(\ (e_{n_in_j}{}^{dE}{}_{pq})(e_{n_jn_i}{}^{bE}{}_{qt})\ )$

3.3: $n_{i-1} < p \leq n_i$, $n_{j-1} < q \leq t \leq n_j \neq n_i$:

$F(e_{n_in_j}{}^{dE}{}_{pq})F(bE_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qt}e'_{tn_j}(b) \overset{(3.13)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qt}e'_{tn_j}(d)e_{qt}e'_{tn_j}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qt}e'_{tn_j}(db) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pt}e'_{tn_j}(db) \overset{(3.26)}{=\!=} F(e_{n_in_j}{}^{dbE}{}_{pt}) = F(\ (e_{n_in_j}{}^{dE}{}_{pq})(bE_{qt})\ )$

3.4: $n_{i-1} < p \leq n_i$, $n_{j-1} < t < q \leq n_j \neq n_i$:

$F(e_{n_in_j}{}^{dE}{}_{pq})F(j_{n_j}{}^{bE}{}_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qt}e'_{qn_j}(b) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qn_j}e_{n_jt}e'_{tn_j}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_j}{}^{de}{}_{n_jt}e'_{tn_j}(b) \overset{(3.23)}{=\!=}$

$= e_{pq}e_{qn_j}e_{n_jt}e''_{tn_j}(f_{jj}(d)b) \overset{(3.8)}{=\!=} e_{pt}e_{tq}e_{qn_j}e_{n_jt}e''_{tn_j}(f_{jj}(d)b) =$

$\overset{(3.10)}{=\!=} e_{pt}j_te''_{tn_j}(f_{jj}(d)b) \overset{(3.25)}{=\!=} e_{pt}e'_{tn_j}(dj_{n_j}b) \overset{(3.26)}{=\!=}$

$= F(e_{n_in_j}{}^{dj}{}_{n_j}{}^{bE}{}_{pt}) = F(\ (e_{n_in_j}{}^{dE}{}_{pq})(j_{n_j}{}^{bE}{}_{qt}\ )\ )$

3.5: $n_{i-1} < p \leq n_i$, $n_{j-1} < q \leq n_j$, $n_{s-1} < t \leq n_s$,
$n_i \neq n_j \neq n_s \neq n_i$, $e_{n_in_j}e_{n_jn_s} = e_{n_in_s}$

$F(e_{n_in_j}{}^{dE}{}_{pq})F(e_{n_jn_s}{}^{bE}{}_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qt}e'_{tn_s}(b) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qn_j}e_{n_jt}e'_{tn_s}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_j}{}^{de}{}_{n_jt}e'_{tn_s}(b) \overset{(3.23)}{=\!=}$

$= e_{pq}e_{qn_j}e_{n_jt}e''_{tn_s}(f_{js}(d)b) \overset{\text{Voraus.}}{=\!=} e_{pt}e''_{tn_s}(f_{js}(d)b) \overset{(3.27)}{=\!=}$

$= F(e_{n_in_s}f_{js}(d)bE_{pt}) \overset{\text{Voraus.}}{=\!=} F(e_{n_in_j}e_{n_jn_s}f_{js}(d)bE_{pt}) \overset{(3.21)}{=\!=}$

$= F(e_{n_in_j}{}^{de}{}_{n_jn_s}{}^{bE}{}_{pt}) = F(\ (e_{n_in_j}{}^{dE}{}_{pq})(e_{n_jn_s}{}^{bE}{}_{qt})\ )$

3.6: $n_{i-1} < p \leq n_i$, $n_{j-1} < q \leq n_j$, $n_{s-1} < t \leq n_s$,
$n_i \neq n_j \neq n_s \neq n_i$, $e_{n_in_j}e_{n_jn_s} = j_{n_i}e_{n_in_s}$

$F(e_{n_in_j}{}^{dE}{}_{pq})F(e_{n_jn_s}{}^{bE}{}_{qt}) \overset{(3.26)}{=\!=} e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qt}e'_{tn_s}(b) \overset{(3.8)}{=\!=}$

$= e_{pq}e'_{qn_j}(d)e_{qn_j}e_{n_jt}e'_{tn_s}(b) \overset{(3.15)}{=\!=} e_{pq}e_{qn_j}de_{n_jt}e'_{tn_s}(b) \overset{(3.23)}{=\!=}$

$= e_{pq}e_{qn_j}e_{n_jt}e''_{tn_s}(f_{js}(d)b) \overset{\text{Voraus.}}{=\!=} e_{pt}j_te''_{tn_s}(f_{js}(d)b) \overset{(3.25)}{=\!=}$

$= e_{pt}e'_{tn_s}(e_{n_sn_j}de_{n_jn_s}) \overset{(3.26)}{=\!=} F(e_{n_in_s}e_{n_sn_j}de_{n_jn_s}E_{pt}) \overset{(3.12)}{=\!=}$

$= F(e_{n_in_j}de_{n_jn_s}bE_{pt}) = F(\,(e_{n_in_j}dE_{pq})(e_{n_jn_s}bE_{qt})\,).$

Durch Aufsummieren erhält man: $F(a\cdot b) = F(a)\cdot F(b)$ für alle a, b aus S. Damit ist R zu einem Faktorring von S isomorph. Folglich hat also R eine gute Selbstdualität nach Korollar 3 zu Satz 1.3.

q.e.d.

Bemerkung: a) Im Fall $c_{n_in_i} = 1$ gilt, daß $j_{n_i} = 0$ und $e_{ts} = 0$ für $t > s$ ist. Ferner existiert kein $e_{n_in_j}$ mit $i \neq j$. Somit kann man F alleine durch die erste der drei Gleichungen in (3.26) definieren, d. h.: $F(dE_{ij}) = e_{ij}e'_{jn}(d)$. Auf diese Weise erhält man das bereits im Beweis zitierte Ergebnis, daß R im wesentlichen Faktorring von S ist, bereits durch den ersten der vierzehn unterschiedenen Fälle.

b) Im Beweis des ersten Lemmas wird gezeigt, daß jeder einreihige Ring, für den $n \nmid c_i - 1$ für alle i gilt, Faktorring eines einreihigen QF- Ringes ist (s. hierzu auch [32, Theorem 9]).

Faßt man Lemma 3.1 und Lemma 3.2 zusammen erhält man:

Satz 3.3

Jeder einreihige Ring hat eine gute Selbstdualität.

Mit Hilfe von Korollar 3 zu Satz 1.3 kann man noch formulieren:

Korollar

Jeder Faktorring eines jeden HDE- Unterringes eines einreihigen Ringes ist von guter Selbstdualität.

Man kann dieses Ergebnis dazu benutzen, um im nächsten Kapitel eine weitere Klasse von Ringen als selbstdual zu erkennen:

Kapitel 4

Linkseinreihige Ringe

Unter einem linkseinreihigen Ring versteht man einen linksartinschen Ring, für den gilt, daß ${}_RR$ direkte Summe von einreihigen R- Linksmoduln ist, d. h.: Jedes primitive Linksideal in R ist einreihig (s. z. B. [19]). Analog definiert man einen rechtseinreihigen Ring. Ein Ring ist genau dann einreihig, wenn er sowohl links- als auch rechtseinreihig ist.

Ein relativ einfaches Beispiel für einen linkseinreihigen und artinschen Ring erhält man mit dem Standardbeispiel für einen nicht selbstdualen Ring (0.7):

$$R = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Wobei D Schiefkörper, C Unterschiefkörper von D mit $lg({}_CD) = 2$, $lg({}_CD) = \infty$ ist. R ist linkseinreihig, denn es gilt: $J = \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $JE_{11} = 0$, $JE_{22} = DE_{22}$, d. h., JE_{22} hat als einzigen echten Untermodul nur noch Null. Also sind RE_{11} und RE_{22} linkseinreihig und damit ist R linkseinreihig.

Somit ist klar, daß nicht alle linkseinreihigen Ringe Selbstdualität besitzen können, sondern, daß man noch weitere Voraussetzungen benötigt.

Seien deshalb linkseinreihige Ringe betrachtet, für die eR distributiv ist für jedes primitive Idempotent e in R. D. h., es werden Ringe betrachtet, für die nach (0.6) gilt: ${}_{eRf}{}_{fRf}$ ist einreihig für alle primitiven Idempotente e aus R.

Setzt man dies voraus, so folgt, daß R artinsch ist: Da R linksartinsch, ist folgt, daß $lg({}_{e_iRe_i}e_iRe_i)$ kleiner ist als $lg({}_RR)$ und damit ist $lg({}_{e_iRe_i}e_iRe_i)$ endlich. Die e_i seien

aus einer vollständigen Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente $e_1, e_2, \ldots, e_n$ für R. Da e_iRe_i lokaler Ring ist, folgt, daß e_iJe_i der einzige maximale Untermodul von e_iRe_i ist, sowohl als e_iRe_i- Rechts-, als auch als e_iRe_i- Linksmodul ([1, 15.15 Proposition]). Da e_iRe_i sowohl als Links- als auch als Rechtsmodul einreihig ist, folgt, daß der einzige maximale Rechts- bzw. Linksuntermodul von $(e_iJe_i)^1$ für $(e_iJe_i)^1 \neq 0$ $(e_iJe_i)^1e_iJe_i$ bzw. $e_iJe_i(e_iJe_i)^1$ ist. Damit sind die Untermoduln von e_iRe_i als Rechtsmodul identisch zu den Untermoduln von e_iRe_i als Linksmodul über sich. Somit erhält man, daß $lg(\ e_iRe_i\ e_iRe_i\ )$ endlich ist und sogar gleich $lg(\ e_iRe_i\ e_iRe_i\ )$. Daraus folgt:

(4.1) e_iRe_i ist artinscher und darüberhinaus lokaler einreihiger Ring.

Weil e_jRe_i einreihiger e_iRe_i- Modul ist, ist $lg(\ e_jRe_i\ e_iRe_i\ )$ nicht größer als $lg(\ e_iRe_i\ e_iRe_i\ )$. Damit folgt, daß auch $lg(\ e_jRe_i\ e_iRe_i\ )$ endlich ist für alle e_j, e_i. Da ein Vergleich der Untermodulketten ergibt, daß $\sum_{i,j=1}^{n} lg(\ e_jRe_i\ e_iRe_i\ ) \geq$ $\geq lg(\ R_R\ )$ ist, folgt, daß auch $lg(\ R_R\ )$ endlich ist. Somit hat R als Rechtsmodul über sich eine Kompositionsreihe und ist folglich rechtsartinsch nach [1, 11.1 Propositon]. Folglich ist also R artinsch.

Sei in den weiteren Vorbemerkungen zu Lemma 4.1 und Lemma 4.2 jeder linkseinreihige Ring R stets unzerlegbarer Basisring und sei eR distributiv für alle primitiven Idempotente e aus R, wenn nichts anderes vermerkt wird. Sei ferner in diesem Kapitel für jeden linkseinreihigen Ring R eine vollständige Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_n$ aus R festgewählt. Sei diese Menge mit M bezeichnet und bis auf eventuelle Umindizierungen konstant beibehalten.

Wesentliche Aussagen über die Struktur von einreihigen und linkseinreihigen Ringen stammen von G. Ivanov ([19]). Seien deshalb folgende Festlegungen von Ivanov zitiert (Die Reihenfolge der Idempotente und auch die Bezeichnungen von Ivanov wurden teilweise abgeändert, damit sie mit den anderen Kapiteln übereinstimmen.):

(4.2) Definitionen nach Ivanov:

Ivanov definiert rekursiv für jedes e_i aus M eine Folge $e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_p}, \ldots$ von primitiven Idempotenten aus M durch $e_{k_1} := e_i$, für $e_{k_{p+1}}$ gelte: $Re_{k_{p+1}} / Je_{k_{p+1}} \cong Je_{k_p} / J^2 e_{k_p}$, d. h., $Re_{k_{p+1}}$ ist die projektive Überlagerung von Je_{k_p}. Fr bezeichnet diese Folge als $\underline{s(e_i)}$.

Er unterscheidet zwei Fälle von linkseinreihigen Ringen:
- den FS- Fall, in dem für jedes Idempotent e_i aus M gilt, daß die Folge $s(e_i)$ abbricht,
- den IS- Fall, in dem für jedes Idempotent e_i aus M die obige Folge nie abbricht.

Andere, als diese beiden Fälle treten nicht auf, denn R ist unzerlegbar. Die Eindeutigkeit der Idempotente aus der Folge $s(e_i)$ erhält man dadurch, daß R Basisring ist (bzw. dadurch, daß man sich auf eine Basismenge von Idempotenten beschränkt, wenn R kein Basisring ist).

Sei zuerst einmal der FS- Fall betrachtet. In diesem Fall gibt es ein Idempotent e_1 für das $lg({}_R Re_1) = 1$ ist ([19, Lemma 3 (a)]), d. h., $Je_1 = 0$. Man hat also einen einfachen projektiven Linksmodul. Diese Aussage ist für einen linkseinreihigen Ring äquivalent zur FS- Eigenschaft. Weiterhin gilt nach [19, Theorem 10 (v)]: $Rad({}_{e_iRe_i} e_iRe_j) = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Da ${}_R Re_j$ einreihig ist, ist ${}_R Re_j$ auch distributiv. Damit ist ${}_{e_iRe_i} e_iRe_j$ einreihig nach (0.6), d. h.: $lg({}_{e_iRe_i} e_iRe_j) \leq 1$. Ferner folgt: e_iRe_i ist Schiefkörper,

denn e_iRe_i ist ein lokaler Ring mit Radikal gleich Null. Da e_jR distributiv ist für alle j, also $(e_jRe_i)_{e_iRe_i}$ einreihiger Modul über einem Schiefkörper ist, gilt somit für alle i,j:

(4.3) $lg({}_{e_iRe_i}\, e_iRe_j)$, $lg({}_{e_jRe_i}\, e_iRe_i) \leqq 1$ im FS- Fall.

Für den folgenden Beweis ist ein Ergebnis von K. R. Fuller und J. K. Haack ([15, Theorem 2]) wichtig:

(4.4) Sind der Rechts- und der Linksköcher über einem artinschen Ring R Bäume, so gibt es einen tic tac toe- Ring T über einem Schiefkörper D, so daß R isomorph zu einem Faktorring von T ist. Darüberhinaus sind der Köcher von R und der von T identisch.

Ferner gilt:

(4.5) Ist R Basisring, so ist T Unterring eines oberen Dreiecksmatrizenringes.

Ein Köcher ist dabei eine endliche Menge von Punkten verbunden durch Pfeile. Den Linksköcher eines artinschen Ringes R erhält man, wenn $e_1,\ldots, e_n$ eine Basismenge primitiver Idempotente ist, wie folgt:

Die Punkte des Köchers $\underline{Q}({}_RR)$ seien $v_1,\ldots, v_n$, je einer für jedes Idempotent. Gilt, daß genau n_{ij} zu Re_i/Je_i isomorphe Summanden in der Zerlegung von Je_j/J^2e_j als direkte Summe erscheinen, so gibt es n_{ij} Pfeile von v_j nach v_i. Analog erhält man den Rechtsköcher $\underline{Q}(R_R)$ von R.

Für das Verhältnis vom Linksköcher zum Rechtsköcher gilt:

(4.6) Re_i/Je_i ist genau dann zu einem direkten Summanden von Je_j/J^2e_j isomorph, wenn e_jR/e_jJ zu einem direkten Summanden von e_iJ/e_iJ^2 isomorph ist.

Ferner gilt:

(4.7) Ein Köcher ist ein Baum, wenn er zusammenhängend ist und keine orientierten oder nicht orientierten Zyklen enthält.

Der Linksköcher eines Ringes ist genau dann zusammenhängend, wenn R unzerlegbar ist.

(Zu dem bis hier aufgeführten s. z. B. auch [15].)

Für einen linkseinreihigen Ring gilt: Je_i/J^2e_i ist für alle i einfach oder Null. Damit folgt, daß im Linksköcher eines linkseinreihigen Ringes von jedem Punkt v_i maximal ein Pfeil ausgeht: Im FS- Fall gibt es keinen von v_1 ausgehenden Pfeil, da ja $Je_1 = 0$ ist, von allen anderen Punkten geht genau ein Pfeil aus. Im IS- Fall geht von jedem v_t ein Pfeil aus.

Da im Linksköcher eines linkseinreihigen Ringes von jedem v_i nur ein Pfeil ausgehen kann, ist der von v_i ausgehende orientierte Weg eindeutig festgelegt. Ist $v_{k_1} \longrightarrow v_{k_2} \longrightarrow v_{k_3} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_{k_p} \longrightarrow \dots$ ein orientierter Weg in $\underline{Q}({}_R R)$, so ist äquivalent dazu, daß Re_{k_j}/Je_{k_j} direkter Summand von $Je_{k_{j-1}}/J^2e_{k_{j-1}}$ für $j \neq 1$ ist. Da R linkseinreihig, also Je_l/J^2e_l einfach oder Null für alle l ist, ist dies äquivalent zu $Re_{k_j}/Je_{k_j} \cong Je_{k_{j-1}}/J^2e_{k_{j-1}}$ für $j \neq 1$. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß $s(e_{k_1}) = e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_p}, \dots$ ist.

Man hat also:

(4.8) Ist $v_{k_1} \longrightarrow v_{k_2} \longrightarrow v_{k_3} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_{k_p} \longrightarrow \dots$ orientierter Weg in $\underline{Q}({}_R R)$, so ist $s(e_{k_1}) = e_{k_1}, e_{k_2}, e_{k_3}, \dots, e_{k_p}, \dots$ und umgekehrt.

Fuller und Haack haben ferner gezeigt ([15, Lemma 1]): Ist Re_i/Je_i isomorph zu einem direkten Summanden von $J^k e_j/J^{k+1}e_j$, dann gibt es in $\underline{Q}({}_R R)$ einen orientierten Weg der Länge k von v_j nach v_i. $e_i(J^k e_j / J^{k+1}e_j) \neq 0$ ist gleichbedeutend mit: Re_i/Je_i ist zu einem direkten Summanden von $J^k e_j/J^{k+1}e_j$ isomorph. Daraus und aus (4.8) folgt (Man beachte, daß für $i \neq j$ nach Lemma 1.1 a) $e_i Re_j = e_i Je_j$ ist):

(4.9) Ist $e_i R e_j \neq 0$, $i \neq j$ so gibt es in $\underline{Q}({}_R R)$ einen orientierten Weg von v_j nach v_i. Anders ausgedrückt: e_i liegt in $s(e_j)$.

Lemma 4.1

Ist R linkseinreihiger unzerlegbarer Basisring, gilt $e_i R$ ist distributiv für alle primitiven Idempotente e_i aus R und ist R vom FS- Typ, so gilt:

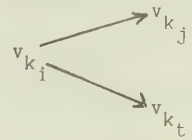
R ist Ring mit Köchern, die Bäume sind. Daraus folgt, daß es einen tic tac toe- Ring T gibt, der Unterring eines oberen Dreiecksmatrizenringes über einem Schiefkörper D ist, so daß R isomorph zu einem Faktorring von T ist. Speziell hat R gute Selbstdualität.

Beweis:

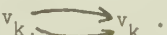
Da R nach den Vorbemerkungen artinsch und nach Voraussetzung unzerlegbar ist, verbleibt nach (4.7) zu zeigen, daß $\underline{Q}(R_R)$ und $\underline{Q}({}_R R)$ keine Zyklen enthalten, um (4.4) anwenden zu können.

a) Ist $v_{k_1} \longrightarrow v_{k_2} \longrightarrow v_{k_3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_{k_p} \longrightarrow v_{k_{p+1}} = v_{k_1}$ ein orientierter Zyklus, so folgt daraus, da R linkseinreihig ist, daß $Re_{k_{i+1}}/Je_{k_{i+1}} \cong Je_{k_i}/J^2 e_{k_i}$ ist für $1 \leqslant i < p$ und daß $Re_{k_1}/Je_{k_1} \cong Je_{k_p}/J^2 e_{k_p}$ ist. Setzt man für $l \in \mathbb{N}$ $e_{k_l} := e_{k_j}$, wobei j die kleinste echt positive Zahl kongruent l modulo p ist, so hat man eine Folge $e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots$ von Idempotenten mit $Je_{k_i}/J^2 e_{k_i} \cong Re_{k_{i+1}}/Je_{k_{i+1}}$, die nicht abbricht. Widerspruch zur FS- Eigenschaft!

b) Angenommen es existiert ein nicht orientierter Zyklus mit Punkten $v_{k_1}, \ldots, v_{k_p}$, so muß es i, j, t geben mit:



oder



Damit gilt aber: $Re_{k_j}/Je_{k_j} \bullet Re_{k_t}/Je_{k_t}$ bzw. $Re_{k_j}/Je_{k_j} \bullet Re_{k_j}/Je_{k_j}$ ist zu einem direkten Summanden von $Je_{k_i}/J^2e_{k_i}$ isomorph. D. h., Re_{k_i} ist nicht einreihig. Widerspruch!

Also gilt: $\underline{Q}({}_R R)$ enthält keine Zyklen.

Da nach (4.6) folgt, daß Re_i/Je_i genau dann zu einem direkten Summanden von Je_j/J^2e_j isomorph ist, wenn e_iJ/e_iJ^2 einen zu e_jR/e_jJ isomorphen Summanden enthält, folgt mit (4.3), daß genau dann $Re_i/Je_i \cong Je_j/J^2e_j$ ist, wenn $e_jR/e_jJ \cong e_iJ/e_iJ^2$ ist. Somit ist $\underline{Q}(R_R)$ der Köcher, bei dem von v_i' nach v_j' genau dann ein Pfeil existiert, wenn einer von v_j nach v_i in $\underline{Q}({}_R R)$ existiert. Dabei sollen die v_k' die Punkte in $\underline{Q}(R_R)$ darstellen. Damit folgt insgesamt: $\underline{Q}(R_R)$ ist zusammenhängend und enthält keine Zyklen. Somit ist auch der Rechtsköcher von R ein Baum.

Insgesamt erhält man, daß R die Voraussetzungen von (4.4) erfüllt. D. h., R ist isomorph zu einem Faktorring eines tic tac toe- Matrizenringes über einem Schiefkörper. Da R Basisring ist, ist T Unterring eines oberen Dreiecksmatrizenringes nach (4.5). Als die Matrizenhauptdiagonale erhaltender Unterring eines Matrizenringes über einem Ring mit guter Dualität hat auch T nach Korollar 2 zu Satz 1.3 gute Dualität und damit auch R nach Korollar 3 zu Satz 1.3.

q.e.d.

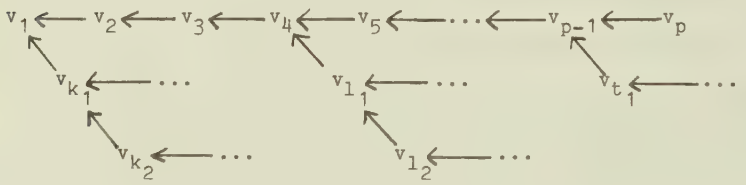
Bemerkung: Daß R in diesem Fall selbstdual ist, erhält man auch einfacher mit Hilfe von Korollar 2 zu Satz 2.1. Man braucht aber dieses spezielle Ergebnis auch noch für den IS-Fall.

Ivanov hat gezeigt ([19, Bemerkungen nach Proposition 2]), daß je zwei Folgen $s(e_i)$ und $s(e_j)$ ein gemeinsames Idempotent enthalten. Da aber $Je_1 = 0$ im FS- Fall ist, besteht $s(e_1)$ nur aus e_1. Also enthält $s(e_j)$ für alle j e_1. Gemäß (4.8)

kann man dies wie folgt formulieren:

(4.10) Im FS- Fall gibt es von jedem $v_j \neq v_1$ einen orientierten Weg nach v_1 in $\underline{Q}({}_R R)$.

Da es keine Zyklen gibt, sieht damit der Linksköcher im FS- Fall im Prinzip wie folgt aus:

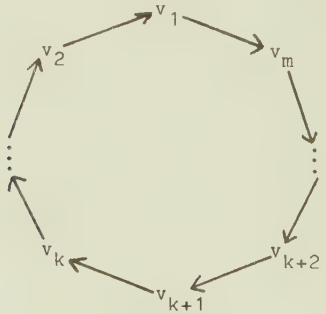


Im IS- Fall hat Ivanov gezeigt, daß es ein $m \leqslant n$ gibt, so daß man die vorgegebenen primitiven Idempotente so ordnen kann, daß gilt ([19, Bemerkungen nach Definition FS und IS]):

(4.11) $Re_i/Je_i \cong Je_{i+1}/J^2e_{i+1}$ für $i < m$,

$Re_m/Je_m \cong Je_1/J^2e_1$

Somit gibt es im Linksköcher von R einen Zyklus



Seien im folgenden die vorgegebenen primitiven Idempotente eines linkseinreihigen Ringes vom IS- Typ stets so angeordnet.

Sei $f := \sum_{i=1}^{m} e_i$, so gilt für fRf nach Ivanov ([19, Theorem 10 und Theorem 11]): fRf ist einreihiger Ring, falls gilt:

i) e_iRe_i ist einreihiger Ring für alle e_i aus fRf,

ii) e_iRe_j ist einreihiger e_jRe_j- Rechtsmodul für alle e_i, e_j

aus fRf.
i) wurde bereits unter (4.1) gezeigt, ii) folgt direkt aus e_iR distributiv mit (0.6). Man hat also:

(4.12) fRf ist einreihig ($f = \sum_{i=1}^{m} e_i$).

Sei M' die Menge der primitiven Idempotente e_k aus M, für die $k \leq m$ gilt. D. h., M' enthält genau diejenigen der Idempotente aus M, die in fRf enthalten sind. Ist e_i aus M', so folgt nach (4.11), daß sämtliche Idempotente aus der Folge $s(e_i)$ in M' liegen. D. h., die Kompositionsreihe von Re_i enthält keinen Kompositionsfaktor, der zu Re_t/Je_t isomorph ist mit $e_t \notin M'$, was $e_tRe_i = 0$ für $t > m$ nach sich zieht. Somit folgt:
(4.13) $(1-f)Rf = 0$, bzw. $Re_i \subset fRf$ für e_i aus M'

Die restlichen Idempotente kann man wie folgt ordnen:
(4.14) Setzt man $s(e_i) := s(e_i)_1, s(e_i)_2, s(e_i)_3, \ldots$, so sei für $j > m$:
$M(j) := \{ e_i \mid s(e_i)_k \notin M', s(e_i)_{k+1} \in M' \text{ folgt } s(e_i)_{k+1} = e_j \}$

D. h.: M(j) ist die Menge der Idempotente aus $M \setminus M'$, für die das erste Idempotent aus $s(e_i)$, das in M' liegt, e_j ist. Anders ausgedrückt: M(j) ist die Menge der Idempotente e_i, für die gilt, daß in $\underline{Q}({}_RR)$ der einzige orientierte Weg, der von v_i ausgeht, den Zyklus aus (4.11) in v_j trifft. Die M(j) stellen eine Partition der Idempotente von $M \setminus M'$ dar nach [19, Theorem 10] (M(k) ist die Vereinigung aller von Ivanov als I(k,...) bezeichneten Mengen.).

Desweiteren seien noch einige Rechenregeln für linkseinreihige Ringe aufgeführt:

Da fRf einreihig ist, folgt für alle e_i und e_j aus M' nach [9, Beweis zu Theorem 2.3], daß die e_iRe_i- Links- und die e_jRe_j- Rechtsuntermoduln von e_iRe_j identisch sind. Liegt e_iRe_j nicht in fRf, so ist nach (4.13) $j > m$. Auch hier sind die Links- und die Rechtsuntermoduln identisch, denn für $i > m$

gilt $\mathrm{Rad}(e_iRe_i) = 0$ nach [19, Theorem 10 (vi) (b)]. Da e_iRe_i ein lokaler Ring ist, folgt, daß e_iRe_i Schiefkörper ist für alle $e_i \notin M'$. Da ferner e_iRe_j einreihiger e_jRe_j- Rechtsmodul ist, folgt:

(4.15) $\lg(\ e_iRe_j\ e_jRe_j\ ) \leqq 1$ für e_j aus $M \setminus M'$.

Damit hat auch e_iRe_j als e_iRe_i- Linksmodul nur die beiden trivialen Untermoduln. Denn angenommen $\lg(\ e_iRe_i\ e_iRe_j\ ) \geqq 2$, so sei $0 \neq x$ aus dem Sockel von $e_iRe_i e_iRe_j$, $r \in \mathrm{Rad}(e_iRe_i) \setminus (\mathrm{Rad}(e_iRe_i))^2$. Da e_iRe_i einreihig, lokal und nicht einfach ist, ist $\mathrm{Rad}(e_iRe_i) \neq 0$. Ferner existiert ein $y \in e_iRe_j$: $ry \neq 0$. Da e_iRe_j einfacher e_jRe_j- Rechtsmodul ist, gibt es ein s, so daß gilt: $xs = y$. D. h.: $0 = 0s = (rx)s = r(xs) = ry \neq 0$. Widerspruch!

Insgesamt hat man (im FS- Fall folgt dies direkt aus (4.3)):

(4.16) Die e_jRe_j- Rechts- und die e_iRe_i- Linksuntermoduln von e_iRe_j sind identisch für alle linkseinreihigen Ringe mit distributiven primitiven Rechtsidealen.

Speziell kann man im folgenden einfach $\mathrm{Rad}(e_iRe_j)$ schreiben statt $\mathrm{Rad}(\ e_iRe_j\ e_jRe_j\ )$ oder $\mathrm{Rad}(\ e_iRe_i\ e_iRe_j\ )$.

Ferner stammt von Ivanov ([19, Theorem 10 (ix)]):

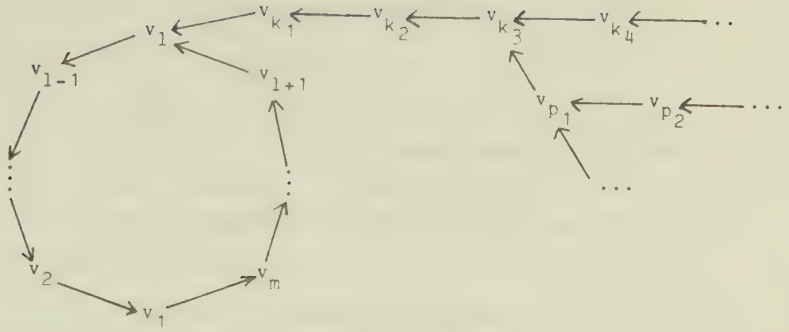
(4.17) Für $i, j, k \leqq m$ gilt:

$$e_iRe_je_jRe_k = \begin{cases} e_iRe_k \text{ für } i \leqq j \leqq k;\ k < i \leqq j;\ j \leqq k < i, \\ \mathrm{Rad}(e_iRe_k) \text{ für } i \leqq k < j;\ j < i \leqq k;\ k < j < i. \end{cases}$$

Für $i, j \leqq m$ und e_k aus $M(t)$ gilt:

$$e_iRe_je_jRe_k = \begin{cases} e_iRe_k \text{ für } i \leqq j \leqq t;\ t < i \leqq j;\ j \leqq t < i, \\ \mathrm{Rad}(e_iRe_k) \text{ für } i \leqq t < j;\ j < i \leqq t;\ t < j < i. \end{cases}$$

Der IS- Fall wird wie folgt bewiesen: Zuerst wird in Lemma 4.2 der Fall untersucht, in dem es nur ein $M(1) \neq \emptyset$ gibt. D. h., man untersucht Ringe, deren Linksköcher im Prinzip wie folgt aussieht:



Der Linksköcher besteht somit aus einem Zyklus, an dem in einem Punkte noch ein Baum hängt. In diesem Fall gibt es einen Ring mit guter Dualität, so daß R isomorph zu einem Faktorring jenes Ringes ist. Im allgemeinen Fall wird R in Unterringe zerlegt, die die Voraussetzungen von Lemma 4.2 erfüllen (Die hier betrachteten Unterringe enthalten nicht notwendig die 1 des Ausgangsringes!). Dann wird gezeigt, daß es einen Ring R' mit guter Dualität gibt, so daß zu jedem der betrachteten Unterringe von R, der nach Lemma 4.2 zu diesem Unterring existierende Ring mit guter Dualität isomorph zu einem Unterring von R' ist. Damit hat man dann Ringepimorphismen von Unterringen von R' auf Unterringe von R. Diese einzelnen Epimorphismen kann man zu guter letzt zu einem Epimorphismus von R' auf R zusammenfassen.

Im folgenden Beweis des zweiten Lemmas wird die spezielle Gestalt des tic tac toe- Ringes ausgenutzt, dessen Existens in Lemma 4.1 bewiesen wurde. Deshalb sei hier die Konstruktion dieses Ringes unter der Voraussetzung, daß der Ursprungsring linkseinreihig vom FS- Typ ist, skizziert (das Folgende nach [15, Beweis zu Theorem 2]):

(4.18) Konstruktionsskizze zum tic tac toe- Ring aus Lemma 4.1:

Man wählt zuerst für alle e_i, e_j mit $e_iJe_j \neq e_iJ^2e_j$ ein e_{ij} aus $e_iJe_j \setminus e_iJ^2e_j$ aus. Diese festgewählten e_{ij} vermitteln einen Schiefkörperisomorphismus f_{ij}: $e_iRe_i \longrightarrow e_jRe_j$ vermöge $e_ire_ie_{ij} = e_{ij}f_{ij}(e_ire_i)$. Man

definiert dann $e_{ii} := e_i$, $f_{ii} := id_{e_iRe_i}$, sowie $f_{ik} :=$ $:= f_{jk}f_{ij}$ und $e_{ik} := e_{ij}e_{jk}$ für bereits definierte f_{jk}, f_{ij} bzw. e_{ij}, e_{jk}. Diese Definition ist eindeutig, da R keine Zyklen enthält. Man erhält induktiv durch die e_{kt} erzeugende Elemente für alle $e_kRe_t \neq 0$. Durch die f_{kt} erhält man induktiv Schiefkörperisomorphismen von e_kRe_k auf e_tRe_t für $e_kRe_t \neq 0$. Für diese Isomorphismen gilt: $e_kre_ke_{kt} = e_{kt}f_{kt}(e_kre_k)$. Aus (4.8) und (4.10) folgt, daß es für jedes $e_k \neq e_1$ eine Folge von Idempotenten $e_k = e_{q_1}, e_{q_2}, \ldots, e_{q_t} = e_1$ gibt mit $Re_{q_i}/Je_{q_i} \cong Je_{q_{i-1}}/J^2e_{q_{i-1}}$ für $1 < i \leq t$. Daraus folgt, daß für $1 < i \leq t$ $e_{q_i}Je_{q_{i-1}} \neq e_{q_i}J^2e_{q_{i-1}}$ ist. D. h., daß für alle $1 < i \leq t$ $f_{q_iq_{i-1}}$ existiert und damit existiert auch $f_{q_tq_1} = f_{1k} : e_1Re_1 \longrightarrow e_kRe_k$ für alle k (Man kommt hier im Gegensatz zum allgemeinen Fall ohne die inversen Isomorphismen aus.). Man definiert mit $D := \left\{ \sum_{k=1}^{m} f_{1k}(e_1re_1) \;\middle|\; e_1re_1 \in e_1Re_1 \right\}$ einen Unterschiefkörper von R. Es gilt, daß e_kRe_k isomorph zu D ist für alle k. T ist dann der tic tac toe- Ring über D, für den gilt:

(4.19) $E_{ii}\,T\,E_{kk} \neq 0$ genau dann, wenn es einen orientierten Weg von v_k nach v_i in $\underline{Q}({}_RR)$ gibt. (Der Weg von v_j nach v_j wird in diesem Kapitel immer als orientiert angesehen.)

Somit ist T der tic tac toe- Ring, der durch $E_{ii}TE_{jj} \neq$ $\neq 0$ für $e_iRe_j \neq 0$ erzeugt wird. Die Abbildung pr: $T \longrightarrow R$ definiert durch

(4.20) $$pr\Big(\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}E_{ij}\Big) := \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}e_{ij}$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus. Aus der Definition von T folgt:

(4.21) $e_i R e_j \neq 0$ folgt $E_{ii} T E_{jj} \neq 0$.

Außerdem gilt natürlich für zwei tic tac toe- Ringe T und T' mit je n primitiven Idempotenten (Elementarmatrizen) E_{kk}:

(4.22) $Q({}_T T) = Q({}_{T'}, T')$ folgt: $E_{ii} T E_{jj} \neq 0 \iff E_{ii} T' E_{jj} \neq 0$

Soviel zur Konstruktion der tic tac toe- Ringe.

Bemerkung: Im wesentlichen den gleichen Ring T erhält man, wenn man zu R gemäß [20, § 2 und Theorem 5] den Tensorring T' wie folgt konstruiert: Sei $A := \prod_{i=1}^{n} e_i R e_i$, $B^{(1)} := B := \bigoplus_{i,j=1}^{n} e_i J e_j$. B ist trivialerweise A- Bimodul. Sei $e_i J e_j \neq e_i J^2 e_j$

ferner $B^{(k+1)} := B^{(k)} \otimes B^{(1)}$ und $T' := A + \sum_{k=1}^{\infty} B^{(k)}$.

Wobei für die Multiplikation gilt: $b_i \cdot b_k := b_i \otimes b_k$, wenn $b_i \in B^{(i)}$, $b_k \in B^{(k)}$ ist. Man erhält dann durch

$(e_1 r_1 e_1, e_2 r_2 e_2, e_3 r_3 e_3, \ldots, e_n r_n e_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} e_i r_i e_i$ bzw.

$e_{k_1} j_1 e_{k_2} \otimes e_{k_2} j_2 e_{k_3} \otimes e_{k_3} j_3 e_{k_4} \otimes \ldots \otimes e_{k_p} j_p e_{k_{p+1}} \longmapsto$

$\longmapsto \prod_{t=1}^{p} e_{k_t} j_t e_{k_{t+1}}$ einen surjektiven Ringhomomorphismus von T' auf R.

Nun können wir zu Lemma 4.2 übergehen:

Lemma 4.2

Es sei R unzerlegbarer linkseinreihiger Basisring. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine vollständige Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente von R. Sei $e_i R$ distributiv für alle e_I. R sei vom IS- Typ. Seien die primitiven Idempotente von R wie in (4.11) angeordnet. Gelte ferner: Es gibt ein e_1 aus M', so daß $e_k \in M(1)$ ist für alle e_k aus $M \setminus M'$. Dann gilt:

a) $N := \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Rad}(e_i R e_j) + \sum_{1<i<j\leq 1+m} e_{[j]} R e_{[i]}$, wobei $[t]$ die kleinste echt positive Zahl kongruent t modulo m ist, ist zweiseitiges Ideal in R und es gilt: R/N erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 4.1. D. h., R/N ist isomorph zu einem Faktorring eines oberen Dreiecksmatrizenringes T über einem Schiefkörper D ($D \cong e_p R e_p / e_p J e_p$ für alle p). Ferner gilt: $pr(E_{ii}) = e_{[1+i]}$ für $i \leq m$, $pr(E_{ii}) = e_i$ für $i > m$, wobei $pr: T \longrightarrow R/N$ der Epimorphismus von T auf R/N gemäß (4.20) ist.

b) Sei $m_{ii} := 1$ für $m \geq i \neq 1$, $m_1 := n-m+1$. Sei S_{kk} der m_k- reihige Matrizenring über $e_k R e_k$, S_{ij} der S_{ii}- S_{jj}- Bimodul der m_i- zeiligen, m_j- spaltigen Matrizen über $e_i R e_j$, und sei

$$S := \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \cdots & & \cdots S_{1,m} \\ S_{21} & S_{22} \cdots & & \\ \cdots & & & \\ & & & \cdots S_{m-1,m} \\ S_{m,1} \cdots & & & \cdots S_{m,m} \end{pmatrix}.$$

Dann ist S zu fRf Moritaäquivalenter Ring.

Seien mit E_{ij} die Elementarmatrizen aus S_{pq}, mit E'_{kt} die Elementarmatrizen aus S bezeichnet. Sei $f' := \sum_{i=1}^{m} (e_i E_{11}) E'_{ii}$ und $R' := f'S + \sum_{\substack{i,\ j\ =\ m+1 \\ E_{ii} T E_{jj} \neq 0}}^{n} (e_1 R e_1 E_{i-m+1,j-m+1}) E'_{11}$, so ist R' HDE- Unterring von S. Ferner gibt es einen surjektiven Ringhomomorphismus $G: R' \longrightarrow R$, so daß $G((e_i s e_j E_{11}) E'_{ij}) = e_i s e_j$ für alle $e_i s e_j$ aus $e_i R e_j$ mit $1 \leq i, j \leq m$ ist.

Beweisskizze:

Da der Beweis dieses Lemmas etwas lang ist, soll zuerst einmal diese Skizze dem Beweise vorangestellt werden:

Nachdem man gezeigt hat, daß man o. E. d. A. 1 = m setzen kann, besteht der Beweis aus vier Hauptteilen:

1. Konstruktion von R':

Hierbei wird unter 1.1 zuerst gezeigt, daß N zweiseitiges Ideal in R ist. N ist so gewählt, daß es das von $e_m R e_1$ erzeugte Ideal ist. Damit erreicht man, daß im Köcher von R/N der Pfeil von v_1 nach v_m nicht mehr vorhanden ist, ansonsten sind die Köcher von R/N und R identisch. Somit ist der gemäß (4.11) in $\underline{Q}({}_R R)$ existierende Zyklus aufgelöst, so daß R/N linkseinreihiger Ring vom FS- Typ ist und die Voraussetzungen von Lemma 4.1 erfüllt. Dieses wird unter 1.2 gezeigt. Damit kann man Lemma 4.1 anwenden und unter 1.3 S und R' definieren und zeigen, daß R' Ring von guter Selbstdualität ist. Nun hat man den Ring, von dem aus man einen Ringepimorphismus auf R konstruieren will.

Es ist g_1: $f'R'f' \longrightarrow fRf$ mit $g_1((e_i r e_j E_{11})E'_{ij}) := e_i r e_j$ trivialerweise Ringisomorphismus. Um einen zweiten Ringepimorphismus zu bekommen geht man über zur

2. Konstruktion von g_2: $R' \longrightarrow R/N$.

Zuerst konstruiert man unter 2.1 analog zu N ein zweiseitiges Ideal N' von R'. Um unter 2.5 zeigen zu können, daß auch R'/N' die Voraussetzungen von Lemma 4.1 erfüllt, zeigt man der Reihe nach unter 2.2, daß T linkseinreihig ist und daß $E_{ii} T E_{jj} \neq \neq 0$ ist für $j \geqslant i \leqslant m$, unter 2.3, daß R'/N' Basisring ist, unter 2.4, daß $\underline{Q}({}_{R'/N'}R'/N') = \underline{Q}({}_T T)$ ist.

Man kann jetzt unter 2.6 Lemma 4.1 auf R'/N' anwenden und einen tic tac toe- Ring T' zu R'/N' so konstruieren, daß man eine Isomorphie t von T in T' angeben kann. Unter 2.7 definiert man g_2 mit Hilfe von t und den Epimorphismen von T auf R/N, bzw. von T' auf R'/N'. Auf Grund der speziellen Definition von g_2 kann man zeigen:

3. $g_2((e_i r e_j E_{11})E'_{ij}) = \mathrm{proj}(\, g_1((e_i r e_j E_{11})E'_{ij})\,)$

Dabei ist proj die übliche Projektion von R auf R/N.

Die auf R(1-f) als Quelle und R/N(1-f+N) als Ziel eingeschränkte proj ist ein Gruppenisomorphismus. Definiert man in diesem Bereich u als ihre Umkehrung, so kann man zur

4. Definition G: $R' \longrightarrow R$

übergehen durch $G((e_i r e_j E_{11})F'_{ij}) := g_1((e_i r e_j E_{11})F'_{ij})$, $G((e_1 r e_1 E_{ij})F'_{11}) := u(\, g_2((e_1 r e_1 E_{ij})F'_{11})\,)$ und zeigen, daß G Ringepimorphismus ist.

Beweis:

Bei der Anordnung der Idempotente nach Ivanov im IS- Fall wird nur verlangt, daß für $i \leq m$ $Re_i/Je_i \cong Je_{[i+1]}/J^2 e_{[i+1]}$ ist. Mit $[t]$ sei die kleinste echt positive Zahl kongruent t modulo m bezeichnet. Somit ist es unerheblich, bei welchem der Idempotente aus M' die Indizierung begonnen wird. Man kann also die Idempotente so umordnen, daß sie wie folgt geordnet sind: $e_{[1+1]}, e_{[1+2]}, \ldots, e_{[1+m]} = e_1, e_{m+1}, \ldots, e_n$. Dabei geht $\sum_{1<i<j\leq 1+m} e_{[i]} R e_{[j]}$ in $\sum_{1\leq p<q\leq m} \bar{e}_p R \bar{e}_q$ über mit $\bar{e}_p := e_{[p+1]}$. $pr(E_{ii}) = e_{[1+i]}$ für $i \leq m$, $pr(E_{ii}) = e_i$ für $i > m$ geht über in $pr(E_{kk}) = \bar{e}_k$ für alle $1 \leq i \leq n$, mit $\bar{e}_k := e_k$ für $k > m$. Man kann somit o. B. d. A. annehmen, daß $l = m$ ist.

1. Konstruktion von R':

1.1 Zuerst ist zu zeigen, daß die durch

$$(4.23)\quad N := \sum_{1\leq i<j\leq m} e_j R e_i + \sum_{p,q=1}^{n} \mathrm{Rad}(e_p R e_q)$$

definierte Teilmenge von R zweiseitiges Ideal in R ist. Trivialerweise ist N als Summe abelscher Gruppen abelsche Gruppe. N ist aber auch bzgl. der Multiplikation mit Elementen aus R abgeschlossen:

Sei $e_i r e_j$ aus N, $e_j s e_t$ aus R. Ist $e_i r e_j e_j s e_t \in \mathrm{Rad}(e_i R e_t)$, so ist $e_i r e_j e_j s e_t \in N$. Sei also $e_i r e_j e_j s e_t \in e_i R e_t \setminus \mathrm{Rad}(e_i R e_t)$. Da $\mathrm{Rad}(e_i R e_j) e_j R e_t = e_i J e_i e_i R e_j e_j R e_t \subset e_i J e_i e_i R e_t = \mathrm{Rad}(e_i R e_t)$ ist, muß also $e_i r e_j \in e_i R e_j \setminus \mathrm{Rad}(e_i R e_j)$ sein, d. h. aber, daß $m \geq i > j$ ist gemäß der Konstruktion von N. Ferner muß

$e_iRe_je_jRe_t = e_iRe_t$ gelten. Dies gilt aber nach (4.17) unter den Voraussetzungen $m \geq i > j$ und $e_k \in M(m)$ für alle $e_k \in M \setminus M'$ nur für $j \leq t < i$. Damit ist aber $e_iRe_t \subset N$, d. h. jedoch: $e_ire_je_jse_t$ ist ein Element von N.

Gilt andererseits $e_ire_j \in e_iRe_j$, $e_jse_t \in N$, so ist für $e_ire_je_jse_t \in \mathrm{Rad}(e_iRe_t)$ $e_ire_je_jse_t$ aus N. Liegt $e_ire_je_jse_t$ nicht in $\mathrm{Rad}(e_iRe_t)$, so folgt wieder $e_jse_t \in e_jRe_t \setminus \mathrm{Rad}(e_jRe_t)$, d. h.: $m \geq j > t$ nach (4.23). Ferner gilt $i \leq m$. Denn nach (4.13) ist $e_iRe_j = 0$ für $i > m \geq j$, aber $e_ire_je_jse_t \notin \mathrm{Rad}(e_iRe_t)$ folgt $e_ire_j \neq 0$. Unter den Voraussetzungen $m \geq j > t$, $m \geq i$ folgt aus $e_iRe_je_jRe_t = e_iRe_t$ nach (4.17): $t < i \leq j$. Damit liegt aber e_iRe_t in N. Insgesamt ist also gezeigt: N ist zweiseitiges Ideal in R. Somit existiert R/N:

1.2 R/N erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 4.1: Da R Basisring ist, ist damit also auch R/N Basisring nach Lemma 1.1 c). Da ${}_RRe_i$ einreihig ist für alle i, ist Re_i/Ne_i einreihig als R- und auch als R/N- Linksmodul. Da Re_i/Ne_i gemäß [1, 7.10. Proposition] isomorph zu R/N (e_i+N) als R/N-Modul ist, ist ${}_{R/N}R/N$ einreihig. Damit ist R/N linkseinreihiger Ring.

Da $\mathrm{Rad}(e_iRe_j)$ beidseits maximaler Untermodul eines lokalen Moduls ist, folgt: $\lg((e_i+N)R/N(e_j+N)) \leq 1$ für alle e_i, e_j, sowohl als $(e_i+N)R/N(e_i+N)$- Links- als auch als $(e_j+N)R/N(e_j+N)$-Rechtsmodul. Speziell ist also $(e_i+N)R/N(e_j+N)$ einreihiger $(e_j+N)R/N(e_j+N)$- Rechtsmodul. Damit ist $(e_i+N)R/N$ distributiv für alle i. Nach Definition N (4.23) und Lemma 1.1 a) gilt $Je_i = Ne_i$ genau dann, wenn $1 = i$ ist. Da mit [1, 15.8. Corollary] ferner folgt $\mathrm{Rad}(R/N) = J/N$, gilt also $\mathrm{Rad}(R/N)(e_1+N) = 0$. Damit ist R/N vom FS- Typ.

Für $i \neq 1$ gilt: Re_k überlagert Je_i projektiv zieht $R/N(e_k+N)$ ist projektive Überlagerung von $J/N(e_i+N)$ nach sich. Somit

gibt es für v_i' aus $\underline{Q}({}_{R/N}R/N)$ mit $i \neq 1$ einen Pfeil nach v_k', wenn es einen solchen von v_i nach v_k in $\underline{Q}({}_RR)$ gibt. Da $\mathrm{Rad}(R/N)(e_1+N) = 0$ ist, geht von v_1 kein Pfeil aus. R/N ist linkseinreihig bedingt, daß von jedem Punkt maximal ein Pfeil ausgeht (dies ist unabhängig davon, ob R unzerlegbar ist oder nicht). Im Linksköcher von R/N geht von jedem Punkt ein Pfeil aus, also erhält man:

(4.24) Der Köcher $\underline{Q}({}_RR)$ unterscheidet sich von $\underline{Q}({}_{R/N}R/N)$ nur dadurch, daß in $\underline{Q}({}_{R/N}R/N)$ von v_1' kein Pfeil ausgeht.

Speziell folgt daraus, daß R/N unzerlegbar ist.

Somit erfüllt R/N die Voraussetzungen von Lemma 4.1, d. h.: Es existiert wie unter (4.18) ein tic tac toe- Ring T, der Unterring eines oberen Dreiecksmatrizenringes ist und ein Epimorphismus $pr: T \longrightarrow R/N$ für den nach (4.20) gilt: $pr(E_{ii}) = e_i+N$. Da T Unterring eines oberen Dreiecksmatrizenringes ist, gilt:

(4.25) Man kann die Idempotente aus $M \setminus M'$ so ordnen, daß gilt: $p > q$ folgt $e_pRe_q = 0$.

1.3 Man kann jetzt S und R' definieren:

Sei

$$S := \begin{pmatrix} S_{11} \cdots & \cdots S_{1m} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ S_{m1} \cdots & \cdots S_{mm} \end{pmatrix}$$

mit S_{ii} dem m_i- reihigen Matrizenring über e_iRe_i, S_{ij} dem Bimodul der m_i- zeiligen, m_j- spaltigen Matrizen über e_iRe_j. Dabei ist $m_i := 1$ für $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $m_m := n-m+1 = \mathrm{card}(M(m))+1$.

Somit ist S isomorph zu $\mathrm{End}_{fRf}(fRe_1 \oplus fRe_2 \oplus \ldots \oplus fRe_m^{(n-m+1)})$. Also ist S einreihiger Ring mit zu fRf isomorphem Basisring.

Seien mit E_{ij} die Elementarmatrizen aus S_{pq}, mit E'_{kt} die Elementarmatrizen aus S bezeichnet. Sei $e_i' := (e_iE_{11})E'_{ii}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$, $e_i' := (e_mE_{i-m+1,i-m+1})E'_{mm}$ für $m < i \leqslant n$, $f' :=$

$:= \sum_{i=1}^{m} e_i'$. Die e_i' stellen eine vollständige Menge paarweise orthogonaler primitiver Idempotente von S dar. Sei

$$\underline{(4.26)}\quad R' := f'S + \sum_{\substack{i,j = m+1 \\ E_{ii}TE_{jj}\neq 0}}^{n} e_i'Se_j'$$

Es wird beim zweiten Summanden über alle die $e_i'Se_j'$ summiert, für die ein orientierter Weg von v_j' nach v_i' im Linksköcher von R/N existiert.

Da $pr(E_{ii}) = e_i + N$ für $i > m$ unabhängig davon ist, ob $l = m$ ist oder nicht, ist die Summe, die den zweiten Summanden in (4.26) darstellt auch unabhängig davon ob $l = m$ ist oder nicht. D. h., diese Summe geht bei zyklischer Umindizierung der ersten m Idempotente in sich über.

R' ist Unterring von S: Da R' Summe abelscher Untergruppen ist, ist R' additiv abgeschlossen. Seien $e_i's'e_j'$, $e_j'r'e_k'$ aus R', ist $e_i's'e_j' \in f'S$, so ist $e_i's'e_j'e_j'r'e_k' \in f'S \subset R'$. Ist $e_i's'e_j' \notin f'S$, so ist $e_i's'e_j' \neq 0$ nur für $i,j > m$. Für $j > m$ ist $e_j'r'e_k' \neq 0$ nur für $k > m$ nach der Definition von R'. Gilt aber $e_i'R'e_j' \neq 0 \neq e_j'R'e_k'$, so gibt es einen Weg von v_k nach v_j und einen von v_j nach v_i gemäß (4.26). Damit existiert auch ein Weg von v_k nach v_i, d. h., nach der Konstruktion von R' gilt: $e_i'R'e_k' = e_i'Se_k'$, was $e_i's'e_j'e_j'r'e_k'$ aus R' nach sich zieht. Damit ist R' Unterring von S.

Trivialerweise gilt $e_i'Se_i' \subset R'$ für alle $1 \leq i \leq n$. Damit ist R' HDE- Unterring von S, d. h. Unterring eines einreihigen Ringes. Gemäß dem Korollar zu Satz 3.3 hat R' gute Selbstdualität und auch alle Faktorringe von R'.

Es ist jetzt zu zeigen, daß es einen surjektiven Ringhomomorphismus G von R' in R gibt. Dieser soll aus zwei Ringhomomorphismen g_1 und g_2 konstruiert werden: Trivialerweise ist

$$\underline{(4.27)}\quad g_1 : f'R'f' \longrightarrow fRf \subset R$$

$$(e_i re_j E_{11})E_{ij}' \longmapsto e_i re_j$$

ein Ringisomorphismus zwischen f'R'f' und fRf.

2. Konstruktion von $g_2: R' \longrightarrow R/N$

Sei

$$\underline{(4.28)}\quad N' := \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Rad}(e_i'R'e_j') + \sum_{1 \leq q < p \leq m} e_p'R'e_q'.$$

Da $e_p'R'e_q' = e_iRe_kE_{jt}E_{ik}'$ ist mit geeigneten i, j, k und t, sind das Rechts- und das Linksradikal von $e_p'R'e_q'$ identisch gemäß (4.16).

2.1 N' ist zweiseitiges Ideal in R':
Da N zweiseitiges Ideal in R ist, folgt, daß fNf zweiseitiges Ideal in fRf ist. Sei

$$N'' := \begin{pmatrix} N_{11} \cdots & \cdots N_{1m} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ N_{m1} \cdots & \cdots N_{mm} \end{pmatrix} \subset S$$

wobei N_{ij} der Bimodul der m_i- zeiligen und m_j- spaltigen Matrizen über e_iNe_j ist ($m_i = 1$ für $1 \leq i < m$, $m_m = n-m+1$). Dann ist N'' zweiseitiges Ideal in S. Also ist $N^* := N'' \cap R'$ zweiseitiges Ideal in R'. Aber $e_i'N^*e_j' = e_i'R'e_j' \neq 0$ gilt nach Definition von N (4.23) nur für $1 \leq j < i \leq m$, sonst ist $e_i'N^*e_j' = \mathrm{Rad}(e_i'R'e_j')$. Da N' genauso definiert ist, folgt $N' = N^*$. Also ist N' zweiseitiges Ideal in R', damit existiert R'/N'.

Trivialerweise ist

$$\underline{(4.29)}\quad g_1': (f'+N')R'/N'(f'+N') \longrightarrow (f+N)R/N(f+N)$$
$$f'r'f' + N' \longmapsto g_1(f'r'f')$$

ein Ringisomorphismus.

Um zu zeigen, daß R'/N' die Voraussetzungen von Lemma 4.1 erfüllt, sei zuerst einmal gezeigt:

2.2 T ist linkseinreihig und es gilt: $E_{ii}TE_{jj} \neq 0$ für $j \geq i \leq m$.
Da nach (4.4) gilt $\underline{Q}({}_{R/N}R/N) = \underline{Q}({}_TT)$, folgt: $E_{ii}\mathrm{Rad}(T)E_{jj} \subset \subset (\mathrm{Rad}(T))^2 \Longleftrightarrow (e_i+N)\mathrm{Rad}(R/N)(e_j+N) \subset (\mathrm{Rad}(R/N))^2$. Da R/N

linkseinreihig ist, gibt es maximal ein i für jedes j mit $(e_i+N)\mathrm{Rad}(R/N)(e_j+N) \neq (e_i+N)(\mathrm{Rad}(R/N))^2(e_j+N)$. Damit gilt: $\lg(\mathrm{Rad}(T)E_{jj}) / (\mathrm{Rad}(T))^2E_{jj}) \leq 1$. Somit folgt, daß $T/(\mathrm{Rad}(T))^2$ linkseinreihig ist. Aus (3.5) folgt dann die Linkseinreihigkeit von T.

Da T tic tac toe-Ring ist, bedingt $E_{ii}TE_{jj} \neq 0 \neq E_{jj}TE_{kk}$, daß $E_{ii}TE_{kk} \neq 0$ ist. Da in R nach (4.11) gilt, daß $Re_i/Je_i \cong Je_{i+1}/J^2e_{i+1}$ ist für $i < m$, folgt, daß $e_i(Je_{i+1}/J^2e_{i+1}) \neq 0$ ist. D. h., es gilt $e_iJe_{i+1} \neq e_iJ^2e_{i+1}$. Daraus folgt mit (4.23):

(4.30) $(e_i+N)\cdot\mathrm{Rad}(R/N)\cdot(e_{i+1}+N) \neq (e_i+N)\cdot(\mathrm{Rad}(R/N))^2\cdot(e_{i+1}+N)$
für $1 \leq i < m$,

denn Rad(R/N) ist J/N. Ferner folgt aus $e_iJe_{i+1} \neq e_iJ^2e_{i+1}$ auch noch $e_iRe_{i+1} \neq 0$. Damit ist nach (4.21) und (4.23) $0 \neq E_{ii}TE_{i+1,i+1}$ für $1 \leq i < m$. Nun folgt induktiv $E_{ii}TE_{jj} \neq 0$ für $1 \leq i \leq j \leq m$. Da für $m < j$ e_j aus M(m) ist, folgt aus der Konstruktion von M(m), daß es einen Weg von v_j nach v_m im Linksköcher von R gibt. Nach (4.24) gibt es diesen Weg auch im Linksköcher von R/N. Damit ist gemäß (4.19) $E_{mm}TE_{jj} \neq 0$. Da aber $E_{ii}TE_{mm} \neq 0$ für $1 \leq i \leq m$ ist, folgt:

(4.31) $E_{ii}TE_{jj} \neq 0$ für $j \geq i \leq m$.

Sei als nächstes gezeigt:

2.3 R'/N' ist Basisring

R' ist Basisring: Denn sind e_i', e_k' aus R', gilt $i,k \leq m$, so folgt aus $R'e_i' \cong R'e_k'$: $f'R'e_i' \cong f'R'e_k'$. Daraus folgt $fRe_i \cong fRe_k$, da f'R'f' zu fRf vermöge g_1 isomorph ist nach (4.29). Da aber (1-f)Rf = 0 ist nach (4.13), folgt sogar $Re_i \cong Re_k$. Da R Basisring ist, ist also i = k.

Sei also o. B. d. A. $k > i$, $k > m$. Dann gilt nach Konstruktion von R' $e_k'R'e_i' = 0$, denn T ist oberer Dreiecksmatrizenring. Da $0 = e_k'R'e_i' \cong \mathrm{Hom}_{R'}(R'e_k', R'e_i')$ gemäß [1, 4.7. Corollary] ist,

ist von $R'e'_k$ in $R'e'_i$ nur die Nullabbildung linear. Somit gibt es keinen Isomorphismus von $R'e'_k$ auf $R'e'_i$ für $i \neq k$, also ist R' Basisring.

Damit ist aber auch R'/N' Basisring, nach Lemma 1.1 c).

2.4. Darüberhinaus gilt:

(4.32) $\underline{Q}({}_TT) = \underline{Q}({}_{R'/N'}R'/N')$

Denn für $1 < k \leq m$ ist $(e'_j+N')R'/N'(e'_k+N') \not\subset (\mathrm{Rad}(R'/N'))^2$ nur für $j = k-1$: Für $j > m$ ist $(e'_j+N')R'/N'(e'_k+N')$ sowieso gleich 0 nach (4.26). Für $j \leq m$ gilt dies auf Grund der Isomorphie g'_1 zwischen $(f'+N')R'/N'(f'+N')$ und $(f+N)R/N(f+N)$ nach (4.29) und (4.30).

Für alle $i \neq 1$ gilt nach Konstruktion von R' und N': $0 = (e'_i+N')\mathrm{Rad}(R'/N')(e'_1+N')$ analog wie in R/N. Da $\underline{Q}({}_{R/N}R/N) = \underline{Q}({}_TT)$ ist, folgt, daß für $k \leq m$ und für alle i gilt:

$$(e'_i+N')\cdot\mathrm{Rad}(R'/N')\cdot(e'_k+N') \neq (e'_i+N')\cdot(\mathrm{Rad}(R'/N'))^2\cdot(e'_k+N') \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow E_{ii}\mathrm{Rad}(T)E_{kk} \neq E_{ii}(\mathrm{Rad}(T))^2E_{kk}.$$

Für $i < m < j$ gilt gemäß (4.31): $E_{ii}TE_{mm} \neq 0 \neq E_{mm}TE_{jj}$. T ist Basisring: Sei $p > q$: Es ist $\mathrm{Hom}_T(TE_{pp},TE_{qq}) \cong E_{pp}TE_{qq}$, aber $E_{pp}TE_{qq}$ ist Null, da T oberer Dreiecksmatrizenring ist. Also existiert kein Isomorphismus von TE_{pp} auf TE_{qq}. Aus Lemma 1.1 a) folgt jetzt aber: $E_{ii}TE_{mm}E_{mm}TE_{jj} = E_{ii}TE_{jj}$ liegt in $(\mathrm{Rad}(T))^2$.

Andererseits gilt für $i < m < j$: $e'_iR'e'_me'_mR'e'_j =$

$= e_iRe_mE_{11}E'_{im}\ e_mRe_mE_{1,j-m+1}E'_{mm} = e_iRe_me_mRe_mE_{1,j-m+1}E'_{im} =$

$= e_iRe_mE_{1,j-m+1}E'_{im} = e'_iR'e'_j$. Damit folgt $(e'_i+N')R'/N'(e'_m+N')\cdot$

$\cdot(e'_m+N')R'/N'(e'_j+N') = (e'_i+N')R'/N'(e'_j+N')$. Wieder mit Hilfe von Lemma 1.1 a) erhält man, daß $(e'_i+N')R'/N'(e'_j+N)$ in $(\mathrm{Rad}(R'/N'))^2$ liegt.

Sind $i, j, t \geq m$, so gilt für $e'_iR'e'_j \neq 0 \neq e'_jR'e'_t$:

$e'_iR'e'_je'_jR'e'_t = e_mRe_mE_{i-m+1,j-m+1}E'_{mm}\ e_mRe_mE_{j-m+1,t-m+1}E'_{mm} =$

$e_m R e_m E_{i-m+1,t-m+1} E'_{mm} = e'_i R' e'_t$. Da gemäß (4.26), (4.28) und (4.31) für alle i, j gilt, $E_{ii} T E_{jj} \neq 0 \Leftrightarrow (e'_i+N')R'/N'(e'_j+N) \neq 0$, folgt: $E_{ii} T E_{jj} E_{jj} T E_{tt} = E_{ii} T E_{tt}$ gilt für i, j, $t \geq m$ genau dann, wenn $(e'_i+N')R'/N'(e'_j+N')(e'_j+N')R'/N'(e'_t+N') = (e'_i+N')R'/N'(e'_t+N')$ ist. Da $lg(E_{ii} T E_{jj}) \leq 1$ ist als $E_{ii} T E_{ii}$-Linksmodul sowie $lg((e'_i+N')R'/N'(e'_j+N)) \leq 1$ ist als Linksmodul über $(e'_i+N')R'/N'(e'_i+N')$, erhält man wieder mit Lemma 1.1 a):

Für $i,j \geq m$ liegt $E_{ii} T E_{jj}$ genau dann in $(Rad(T))^2$, wenn $(Rad(R'/N'))^2 (e'_i+n')R'/N'(e'_j+N')$ umfaßt. Insgesamt erhält man also: $\underline{Q}({}_T T) = \underline{Q}({}_{R'/N'} R'/N')$.

Man kann jetzt zeigen:

2.5 R'/N' erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 4.1: Gemäß 2.3 ist R'/N' Basisring. Analog 2.2 folgt aus $\underline{Q}({}_T T) = \underline{Q}({}_{R'/N'} R'/N')$, daß R'/N' linkseinreihig ist, da T linkseinreihig ist.

Da $e'_i R' e'_1 = e'_i N' e'_1$ für $i \neq 1$ ist, folgt: $lg(R'/N'(e'_1+N)) = 1$. Damit ist R'/N' vom FS- Typ. Da $Rad(e'_i R' e'_j)$ maximaler Untermodul von $e'_i R' e'_j$ ist, ist $lg((e'_i+N')\ R'/N'\ (e'_j+N)) \leq 1$ als $(e'_j+N')R'/N'(e'_j+N')$- Rechtsmodul, somit ist dieser Modul einreihig. Also ist $(e'_i+N)R'/N'$ distributiv.

Da R/N zusammenhängend ist, $\underline{Q}({}_{R/N} R/N) = \underline{Q}({}_T T) = \underline{Q}({}_{R'/N'} R'/N')$ ist nach (4.2) und (4.32), ist auch R'/N' zusammenhängend. Insgesamt erfüllt also R'/N' die Voraussetzungen von Lemma 4.1.

2.6 Es existiert zu R'/N' gemäß Lemma 4.1 ein tic tac toe-Ring T', der analog zu T konstruiert wird:

Für $(e_i+N)Rad(R/N)(e_j+N) \neq (e_i+N)(Rad(R/N))^2(e_j+N)$ seien e_{ij} aus $e_i R e_j \setminus Rad(e_i R e_j)$ fest gewählt. Sei ferner für definierte e_{ij} und e_{jk} $e_{ik} := e_{ij} e_{jk}$ (vgl. (4.18)). Dann erhält man induktiv für alle t, 1 mit $(e_t+N)R/N(e_1+N) \neq 0$ ein e_{t1}, so daß $e_{t1}+N$ ein erzeugendes Element von $(e_t+N)R/N(e_1+N)$ darstellt.

Mit f_{ij} sei wie unter (4.18) der Ringisomorphismus von $(e_i+N)R/N(e_i+N)$ auf $(e_j+N)R/N(e_j+N)$ bezeichnet, für den gilt: $(e_i r e_i+N)(e_{ij}+N) = (e_{ij}+N)f_{ij}(e_i r e_i+N)$. Ferner ist dann $D := \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_{1i}(e_1 r e_1+N) \;\middle|\; e_1 r e_1 \in e_1 R e_1 \right\}$ der Unterschiefkörper von R, über dem T tic tac toe- Ring ist.

Zur Konstruktion von T' und dem ihm zu Grunde liegenden Schiefkörper D' kann man $e'_{ij}+N'$ aus R'/N' wie folgt für $(e'_i+N')\mathrm{Rad}(R'/N')(e'_j+N') \neq (e'_i+N')(\mathrm{Rad}(R'/N'))^2(e'_j+N')$ wählen:

Für $j < m$ sei $e'_{j,j+1} := e_{j,j+1}E_{11}E'_{j,j+1} = g_1'^{-1}(e_{j,j+1})$. Die Isomorphie g'_1 zwischen $(f'+N')R'/N'(f'+N')$ und $(f+N)R/N(f+N)$ sowie (4.30) garantieren, daß $(e'_j+N')\mathrm{Rad}(R'/N')(e'_{j+1}+N')$ nicht in $(\mathrm{Rad}(R'/N'))^2$ liegt. Die restlichen auszuwählenden $e'_{ij}+N'$ seien gemäß (4.18) gewählt.

Seien für alle i, j f'_{ij} die durch $(e'_i s' e'_i)(e'_{ij}+N') = (e'_{ij}+N')f'_{ij}(e'_i s' e'_i)$ definierten Isomorphismen zwischen $(e'_i+N)R'/N'(e'_i+N)$ und $(e'_j+N')R'/N'(e'_j+N')$ wie unter (4.18).

$$D' := \left\{ \sum_{i=1}^{n} f'_{1i}(e'_1 r' e'_1+N') \;\middle|\; e'_1 r' e'_1 \in e'_1 R' e'_1 \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} f'_{1i}(g_1'^{-1}(e_1 r e_1+N)) \;\middle|\; e_1 r e_1 \in e_1 R e_1 \right\}$$ ist der nach (4.18) zu T' gehörende Unterschiefkörper von R'/N'.

Zwischen den beiden Schiefkörpern D und D' kann man eine Abbildung d definieren vermöge $d\left(\sum_{i=1}^{n} f_{1i}(e_1 r e_1+N) \right) :=$

$$:= \sum_{i=1}^{n} f'_{1i}(e_1 r e_1 E_{11}E'_{11} + N') = \sum_{i=1}^{n} f'_{1i}(g_1'^{-1}(e_1 r e_1 + N)).$$

d ist Isomorphie: Da die f_{1i} und die f'_{1i} Isomorphismen sind, da $f_{1i}(e_1 r e_1+N)f_{1j}(e_1 s e_1+N)$ und $f'_{1i}(e'_1 r' e'_1+N')f'_{1j}(e'_1 r' e'_1+N')$ nur für i = j ungleich Null sein kann, folgt:

$$d\Big(\sum_{i=1}^{n} f_{1i}(e_1re_1+N)\Big)\, d\Big(\sum_{k=1}^{n} f_{1k}(e_1se_1+N)\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} f'_{1i}(e_1re_1E_{11}E'_{11}+N')\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} f'_{1k}(e_1se_1E_{11}E'_{11}+N')\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{1i}(e_1re_1E_{11}E'_{11}+N')\, f'_{1i}(e_1se_1E_{11}E'_{11}+N') =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{1i}(e_1re_1e_1se_1E_{11}E'_{11}+N') = d\Big(\sum_{i=1}^{n} f_{1i}(e_1re_1e_1se_1+N)\Big) =$$

$$= d\Big(\sum_{i=1}^{n} f_{1i}(e_1re_1+N)f_{1i}(e_1se_1+N)\Big) =$$

$$= d\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} f_{1i}(e_1re_1+N)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} f_{1k}(e_1se_1+N)\Big)\Big).$$

Also ist d multiplikativ. Analog folgt, daß d additiv ist. Die Bijektivität folgt direkt aus der Konstruktion von d und R'.

Damit hat man auch eine Isomorphie t von T in T', die $\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}E_{ij}$ aus T in $\sum_{i,j=1}^{n} d(d_{ij})E_{ij}$ aus T' überführt. Denn es gilt $E_{ii}TE_{jj} \neq 0 \Longleftrightarrow E_{ii}T'E_{jj} \neq 0$, da nach (4.4) $\underline{Q}(_T,T') = \underline{Q}(_{R'/N'},R'/N')$ und nach (4.32) $\underline{Q}(_TT) = \underline{Q}(_{R'/N'},R'/N')$ ist, folgt dies direkt aus (4.22).

Man kann jetzt übergehen zur

2.7 Konstruktion von $g_2: R' \longrightarrow R/N$:

Sei $pr': T' \longrightarrow R'/N'$ wie unter (4.20), sei $I' := \ker(pr')$ ($I' = 0$ gilt genau dann, wenn $e_1Re_m \neq 0$ ist.). Da I' zweiseitiges Ideal in T' ist, gilt $(D'E_{ii})I'(D'E_{jj})$ liegt in I'. Da D' Schiefkörper ist, ist $(D'E_{ii})I'(D'E_{jj}) = D'E_{ij}$ oder aber gleich Null. Auf Grund von (4.20) folgt also:

$$I' = \sum_{\substack{i,\,j=1 \\ (e'_i+N')R'/N'(e'_j+N')=0}}^{n} E_{ii}T'E_{jj}$$

Damit ist $\overline{pr'}: T'/I' \longrightarrow R'/N'$ mit $\overline{pr'}(a+I') := pr'(a)$ für alle $a \in T'$ ein Ringisomorphismus.

Sei $I := \sum_{\substack{i,j=1 \\ E_{ii}I'E_{jj}\neq 0}}^{n} E_{ii}TE_{jj}$. I ist trivialerweise zweiseitiges Ideal in T. Es ist $t':T/I \longrightarrow T'/I'$ mit $t'(a+I) := t(a) + I'$ Ringisomorphismus zwischen T/I und T'/I'.

Für I gilt: $I \subset \ker(pr)$:

Für j, $i \leqslant m$ gilt auf Grund der Isomoprphie g_1' zwischen $(f'+N')R'/N'(f'+N')$ und $(f+N)R/N(f+N)$, daß $(e_i+N)R/N(e_j+N) = 0$ aus $(e_i'+N')R'/N'(e_j'+N') = 0$ folgt. Für $j \leqslant m < i$ gilt stets $(e_i+N)R/N(e_j+N) = 0$ nach (4.13).

Für $m < j \leqslant n$ gilt, daß man aus $(e_i'+N')R'/N'(e_j'+N') = 0$ und $E_{ii}IE_{jj} \neq 0$, d. h. speziell $E_{ii}TE_{jj} \neq 0$, erhält, daß $1 \leqslant i \leqslant m$ ist. Denn andernfalls wäre $e_mRe_mE_{i-m+1,j-m+1}E'_{mm} = \mathrm{Rad}(e_mRe_mE_{i-m+1,i-m+1}E'_{mm})$, woraus $e_mRe_m = 0$ folgen würde.

Für $i \leqslant m < j$ gilt nach (4.17), $e_iRe_me_mRe_j = e_iRe_j$. Da aus $(e_i'+N')R'/N'(e_j'+N') = 0$ folgt, daß $\mathrm{Rad}(e_iRe_mE_{1,j-m+1}E'_{im}) = e_iRe_mE_{1,j-m+1}E'_{im}$ ist, gilt $e_iRe_m = 0$. Daraus folgt $e_iRe_j = 0$. Insgesamt hat man: $I \subset \ker(pr)$.

Damit existiert $\overline{pr}:T/I \longrightarrow R/N$ mit $\overline{pr}(a+I) := pr(a)$ für alle a aus T. Sei

$$\begin{array}{ccc} proj:R \longrightarrow R/N & \qquad & proj':R' \longrightarrow R'/N' \\ r \longmapsto r+N & & r' \longmapsto r'+N' \end{array}$$

so ist $g_2 := \overline{pr} \circ t'^{-1} \circ \overline{pr}'^{-1} \circ proj'$ ein surjektiver Ringhomomorphismus von R' auf R/N.

3. Es gilt $g_2(e_i's'e_j') = proj \circ g_1(e_i's'e_j')$ für $1 \leqslant i,j \leqslant m$:
Sei zuerst einmal gezeigt:

(4.33) $f'_{1i} \circ g'^{-1}_1(e_1re_1+N) = g'^{-1}_1 \circ f_{1i}(e_1re_1+N)$ für alle e_1re_1 aus e_1Re_1 und $1 \leq i \leq m$, d. h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (e_1+N)R/N(e_1+N) & \xrightarrow{f_{1i}} & (e_i+N)R/N(e_i+N) \\ \downarrow{\scriptstyle g'^{-1}_1} & & \downarrow{\scriptstyle g'^{-1}_1} \\ (e'_1+N')R'/N'(e'_1+N') & \xrightarrow{f'_{1i}} & (e'_i+N')R'/N'(e'_i+N') \end{array}$$

ist kommutativ für alle $1 \leq i \leq m$.

Sei für alle $k < i \leq m$ $e_{k+1}r_{k+1}e_{k+1}$ aus $f_{k,k+1}(e_kr_ke_k+N)$ mit $e_1r_1e_1 := e_1re_1$ induktiv ausgewählt. Da $f_{1i}(e_1re_1+N) =$ $= f_{i-1,i} \circ \ldots \circ f_{23} \circ f_{12}(e_1r_1e_1+N) = f_{i-1,i} \circ \ldots \circ f_{23}(e_2r_2e_2+N) =$ $= f_{i-1,i}(e_{i-1}r_{i-1}e_{i-1}+N)$ ist, ist $e_ir_ie_i+N = f_{1i}(e_1re_1+N)$.

Es gilt: $e_kr_ke_ke_{k,k+1} = e_{k,k+1}e_{k+1}r_{k+1}e_{k+1} + e_kn_ke_{k+1}$ mit $e_kn_ke_{k+1} \in N$. $e_kn_ke_{k+1} \in e_kNe_{k+1}$ zieht nach sich, daß $e_kn_ke_{k+1}E_{11}E'_{k,k+1}$ ein Element von N' ist. Hieraus erhält man:

$(e_kr_ke_kE_{11}E'_{kk} + N')(e_{k,k+1}E_{11}E'_{k,k+1} + N') =$

$= (e_{k,k+1}E_{11}E'_{k,k+1} + N')(e_{k+1}r_{k+1}e_{k+1}E_{11}E'_{k+1,k+1} + N')$.

$(e_{k,k+1}E_{11}E'_{k,k+1} + N') \circ f'_{k,k+1}(e_kr_ke_kE_{11}E'_{kk} + N')$ ist aber auch gleich dem ersten Term. $(e_{k+1}r_{k+1}e_{k+1}E_{11}E'_{k+1,k+1} + N')$ und $f'_{k,k+1}(e_kr_ke_kE_{11}E'_{kk} + N')$ sind Elemente des Schiefkörpers $(e'_{k+1} + N')R'/N'(e'_{k+1} + N')$. Da $N' \neq e'_{k,k+1} + N'$ ist für $1 \leq k < m$, folgt also, daß $e_{k+1}r_{k+1}e_{k+1}E_{11}E'_{k+1,k+1} + N' =$

$= f'_{k,k+1}(e_kr_ke_kE_{11}E'_{kk} + N')$ ist. Damit folgt: $f'_{1i}(g'^{-1}_1(e_1re_1 + N)) =$

$= f'_{1i}(e_1re_1E_{11}E'_{11} + N') = f'_{i-1,i} \circ \ldots \circ f'_{23} \circ f'_{12}(e_1r_1e_1E_{11}E'_{11} + N') =$

$= f'_{i-1,i} \circ \ldots \circ f'_{23}(e_2r_2e_2E_{11}E'_{22} + N') =$

$= f'_{i-1,i}(e_{i-1}r_{i-1}e_{i-1}E_{11}E'_{i-1,i-1} + N') = e_ir_ie_iE_{11}E'_{ii} + N' =$

$= g'^{-1}_1(e_ir_ie_i + N) = g'^{-1}_1(f_{1i}(e_1re_1 + N))$.

Und somit ist (4.33) gezeigt.

Sei also jetzt $e'_i s' e'_j$ aus R' mit $i, j \leqq m$ fest gewählt. Da $i, j \leqq m$ sind, gibt es ein $e_i s e_j$ aus R mit $g_1'^{-1}(e_i s e_j) = e_i s e_j E_{11} E'_{ij} = e'_i s' e'_j$. Zu $e_i s e_j$ gibt es ein $e_1 r e_1$, so daß $e_i s e_j + N = f_{1i}(e_1 r e_1 + N)(e_{ij} + N) = a(e_{ij} + N)$ ist mit $a := \sum_{i=1}^{n} f_{1i}(e_1 r e_1 + N)$. $a(e_{ij} + N) = pr(aE_{ij}) = \overline{pr}(aE_{ij} + I)$, d. h., $e_i s e_j + N = \overline{pr}(aE_{11} + I)$. Für $aE_{ij} + I$ gilt:

$$aE_{ij} + I = \Big(\sum_{k=1}^{n} f_{1k}(e_1 r e_1 + N) \Big) E_{ij} + I =$$

$$= d^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{n} f'_{1k}(g_1'^{-1}(e_1 r e_1 + N)) \Big) E_{ij} + I =$$

$$= t'^{-1}\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} f'_{1k}(g_1'^{-1}(e_1 r e_1 + N)) \Big) E_{ij} + I' \Big) =$$

$$= t'^{-1}(\overline{pr}'^{-1}\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} f'_{1k}(g_1'^{-1}(e_1 r e_1 + N)) \Big)(e'_{ij} + N') \Big) =$$

$$= t'^{-1} \circ \overline{pr}'^{-1} \Big(f'_{1i}\big(g_1'^{-1}(e_1 r e_1 + N) \big)(e_{ij} E_{11} E'_{ij} + N') \Big) =$$

$$\underset{(4.33)}{=\!=\!=} t'^{-1} \circ \overline{pr}'^{-1} \Big(g_1'^{-1}\big(f_{1i}(e_1 r e_1 + N) \big) g_1'^{-1}(e_{ij} + N) \Big) =$$

$$= t'^{-1} \circ \overline{pr}'^{-1} \Big(g_1'^{-1}\big(f_{1i}(e_1 r e_1 + N)(e_{ij} + N) \big) \Big) =$$

$$= t'^{-1} \circ \overline{pr}'^{-1} \Big(g_1'^{-1}(e_i s e_j + N) \Big) = t'^{-1} \circ \overline{pr}'^{-1}(e_i s e_j E_{11} E'_{ij} + N') =$$

$$= t'^{-1} \circ \overline{pr}'^{-1} \circ proj'(e_i s e_j E_{11} E'_{ij}).$$

Insgesamt hat man: $g_2(e'_i s' e'_j) = g_2(e_i s e_j E_{11} E'_{ij}) =$
$= \overline{pr} \circ t'^{-1} \circ \overline{pr}'^{-1} \circ proj'(e_i s e_j E_{11} E'_{ij}) = \overline{pr}(aE_{ij} + I) =$
$= e_i s e_j + N = proj(e_i s e_j) = proj \circ g_1(e_i s e_j E_{11} E'_{ij}) =$
$= proj \circ g_1(e'_i s' e'_j)$.

Nun kann man übergehen zur

4. Konstruktion von $G: R' \longrightarrow R$

Da $lg(e_i R e_j) \leqq 1$ ist für $j > m$ nach (4.15) und (4.16), folgt, daß $Rad(e_i R e_j) = 0$ ist. Damit ist $proj\big|_{R(1-f);R/N(1-f+N)}$: $R(1-f) \longrightarrow R/N(1-f+N)$ ein Isomorphismus von abelschen Gruppen. Somit existiert $u := (proj\big|_{R(1-f);R/N(1-f+N)})^{-1}$. Sei

jetzt $G: R' \longrightarrow R$ wie folgt definiert:

$G(e'_i s' e'_j) := g_1(e'_i s' e'_j)$ für $1 \leq i, j \leq m$

$G(e'_i s' e'_j) := u \cdot g_2(e'_i s' e'_j)$ für $m < j \leq n$

(Da $(1-f')R'f' = 0$ ist, ist der Fall $e'_i s' e'_j$ mit $j \leq m < i$ uninteressant.)

Auf Grund der Definition folgt sofort, daß G surjektiver Homomorphismus von abelschen Gruppen ist. Damit kann man sich bei Multiplikation auf zwei Elemente der Form $e'_i s' e'_j$, $e'_j r' e'_k$ aus R' beschränken:

Für $i, j, k \leq m$ folgt $G(e'_i s' e'_j) G(e'_j r' e'_k) = G(e'_i s' e'_j \cdot e'_j r' e'_k)$, da g_1 multiplikativ ist.

Ist $j > m$, so muß $k > m$ sein, soll $e'_j r' e'_k \neq 0$ sein. Sei $e_i s e_j + N = g_2(e'_i s' e'_j)$, $e_j r e_k + N = g_2(e'_j r' e'_k)$, dann gilt:

$G(e'_i s' e'_j \cdot e'_j r' e'_k) = u \cdot g_2(e'_i s' e'_j \cdot e'_j r' e'_k) = u(g_2(e'_i s' e'_j) g_2(e'_j r' e'_k)) =$

$= u((e_i s e_j + N)(e_j r e_k + N)) = u(e_i s e_j e_j r e_k + N) =$

$= e_i s e_j e_j r e_k = u(e_i s e_j + N) \cdot u(e_j r e_k + N) = u \cdot g_2(e'_i s' e'_j) \cdot$

$u \cdot g_2(e'_j r' e'_k) = G(e'_i s' e'_j) G(e'_j r' e'_k)$.

Bleibt $i, j \leq m < k$: Sei $e'_i s' e'_j = e_i s e_j E_{11} E'_{ij}$, $e_j r e_k + N =$

$= g_2(e'_j r' e'_k)$: $G(e'_i s' e'_j \cdot e'_j r' e'_k) = u \cdot g_2(e'_i s' e'_j \cdot e'_j r' e'_k) =$

$= u(g_2(e'_i s' e'_j) g_2(e'_j r' e'_k)) = u(\mathrm{proj}(g_1(e'_i s' e'_j)) \cdot g_2(e'_j r' e'_k)) =$

$= u((e_i s e_j + N)(e_j r e_k + N)) = u(e_i s e_j e_j r e_k + N) = e_i s e_j e_j r e_k =$

$= e_i s e_j \cdot u(e_j r e_k + N) = g_1(e'_i s' e'_j) \cdot u(g_2(e'_j r' e'_k)) = G(e'_i s' e'_j) \cdot$

$G(e'_j r' e'_k)$.

Damit ist G surjektiver Ringhomomorphismus von R' auf R: D. h., R ist isomorph zu einem Faktorring von R' und damit ist R als Faktorring eines HDE- Unterringes eines einreihigen Ringes von guter Selbstdualität.

Für G gilt nach Konstruktion:

$G(e_i s e_j E_{11} E'_{ij}) = e_i s e_j$ für alle $1 \leq i, j \leq m$.

q.e.d.

Satz 4.3

Jeder linkseinreihige Ring, für den gilt, daß eR distributiv ist für alle primitiven Idempotente e aus R, hat eine gute Selbstdualität.

Beweis:

Sei o. B. d. A. R unzerlegbarer Basisring. Ist R vom FS-Typ, so folgt die Behauptung aus Lemma 4.1. Sei also R vom IS- Typ. Seien die Idempotente wie in (4.11) geordnet und sei $f = \sum_{i=1}^{m} e_i$, sei ferner $f_i := f + \sum_{e_k \in M(i)} e_k$ und sei $m(i) :=$ $:= \text{card}(M(i)) + 1$.

Die Idempotente außerhalb von fRf kann man noch danach ordnen, in welchem M(j) sie erscheinen: Ist $e_k \in M(1)$, $e_i \in$ $\in M(j)$, $1 < j$ so sei $k < i$.

Es gilt: $e_i R f_j \neq 0$ folgt e_i ist aus $f_j R f_j$:
Denn ist $e_i R f_j \neq 0$, so gibt es ein $e_l \in f_j R f_j$: $e_i R e_l \neq 0$. Ist e_i aus M', so ist e_i auch in $f_j R f_j$. Ist $e_i \notin M'$, so folgt aus (4.9), daß e_i in der Folge $s(e_l)_1$, $s(e_l)_2, \ldots, s(e_l)_k, \ldots$ erscheint. Es existiert also ein p: $s(e_l)_p = e_i$. Dann ist aber $s(e_i)_{q+1} = s(e_l)_{q+p}$ für alle q. Folglich ist nach Konstruktion von M(j) auch e_i aus M(j), d. h., $e_i \in f_j R f_j$. Insgesamt hat man:

(4.34) $(1 - f_j) R f_j = 0$

Damit kann man R zerlegen:

$$R = \begin{pmatrix} fRf & fR(f_1-f) & fR(f_2-f)\dots & \dots fR(f_m-f) \\ 0 & (f_1-f)R(f_1-f) & 0\dots & \dots 0 \\ 0 & 0 & (f_2-f)R(f_2-f) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0\dots & & (f_m-f)R(f_m-f) \end{pmatrix}$$

f_jRf_j ist linkseinreihig für alle $1 \leq j \leq m$. Da e_kRe_i als e_iRe_i- Rechtsmodul einreihig ist, folgt, daß e_kRf_j distributiver f_jRf_j- Modul ist für alle primitiven $e_k \in f_jRf_j$. Aus Lemma 1.1 b) folgt, daß f_jRf_j Basisring ist. Für $e_k \in f_jRf_j$, $e_k \notin M'$ folgt, daß e_k aus M(j) ist. Damit existiert ein Weg von v_k nach v_j im Linkskö̈cher von f_jRf_j. Da nach (4.11) für alle $1 \leq m$ ein Weg von v_1 nach v_j in diesem Kö̈cher existiert, ist f_jRf_j zusammenhängend. Insgesamt folgt, daß f_jRf_j die Voraussetzungen von Lemma 4.2 erfüllt.

Damit existiert zu f_jRf_j ein zweiseitiges Ideal N_j von f_jRf_j, so daß f_jRf_j/N_j linkseinreihig vom FS- Typ ist. Ferner existiert ein tic tac toe- Ring T_j, sowie ein Epimorphismus $pr_j: T_j \longrightarrow f_jRf_j/N_j$. Außerdem kann man nach (4.25) die Idempotente aus f_jRf_j, die nicht in M' liegen, so anordnen, daß in $(f_j-f)R(f_j-f)$ aus $k > i$ folgt $e_kRe_i = 0$. Somit hat $(f_j-f)R(f_j-f)$ eine obere Dreiecksgestalt.

Weiterhin existiert für alle $1 \leq j \leq m$ ein S_j:

$$S_j := \begin{pmatrix} S_{j,11}\cdots & \cdots S_{j,1m} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ S_{j,m1}\cdots & \cdots S_{j,mm} \end{pmatrix}$$

Dabei ist $S_{j,ii}$ der $m_{j,i}$- reihige Matrizenring über e_iRe_i, $S_{j,ki}$ der Bimodul der $m_{j,k}$- zeiligen, $m_{j,i}$-spaltigen Matrizen über e_kRe_i mit $m_{j,j} := m(j)$, $m_{j,i} := 1$ für $i \neq j$.

Zu S_j existiert ein HDE- Unterring R'_j (Seien die Elementarmatrizen aus S_j mit E'_{pq}, diejenigen aus $S_{p,kt}$ mit E_{li} bezeichnet.):

$$R'_j := f''_j S_j + \sum_{\substack{m < p,q \leq m+m(j)-1 \\ E_{pp}{}^T j E_{qq} \neq 0}} e_j R e_j E_{p-m+1,q-m+1} E'_{jj}$$

Dabei sei $f''_j := \sum_{k=1}^{m} e_k E_{11} E'_{kk}$. Von R'_j gibt es einen surjektiven Ringhomomorphismus $g_j : R'_j \longrightarrow f_j R f_j$, für den gilt: $g_j(e_k r e_i E_{11} E'_{ki}) = e_k r e_i$ für alle $e_k r e_i$ aus fRf.

Zu den einzelnen R'_j kann man auch einen umfassenden Ring R' konstruieren, so daß die R'_j Unterringe (i. A. nicht bzgl. der 1!) von R' sind: Sei

$$S := \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12}\cdots & \cdots S_{1,m} \\ S_{21} & S_{22}\cdots & \\ \cdots & & \\ & & \cdots S_{m-1,m} \\ S_{m,1}\cdots & & \cdots S_{m,m} \end{pmatrix}$$

Dabei sei S_{ii} der m(i)- reihige Matrizenring über e_iRe_i, S_{ij} der Bimodul der m(i)-zeiligen, m(j)- spaltigen Matrizen über

e_iRe_j. S ist also isomorph zum Endomorphismenring $\mathrm{End}_{fRf}(fRe_1^{m(1)} \oplus fRe_2^{m(2)} \oplus \ldots \oplus fRe_m^{m(m)})$ und damit Moritaäquivalent zu fRf. Dies bedeutet, daß S einreihiger Ring ist. Seien die Elementarmatrizen aus S wieder mit E'_{ij}, die Elementarmatrizen aus S_{lt} mit E_{pq} bezeichnet.

$$\text{Sei } f' := \sum_{k=1}^{m} e_kE_{11}E'_{kk};\quad f'_j := f' + \sum_{i=2}^{m(j)} e_jE_{ii}E'_{jj},$$

$$R' := f'S + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{p,\ q\ =\ m+1 \\ E_{pp}T_jE_{qq}\neq 0}}^{m\ +\ m(j)} e_jRe_jE_{p-m+1,q-m+1}E'_{jj}.$$

R' ist Unterring von S: Trivialerweise ist R' additive Gruppe. Ist $s \in f'S$, so ist für alle $r \in R'$ $sr \in f'S \subset R'$. Ist $s \notin f'S$, so ist o. B. d. A. $s = e_is'e_iE_{pq}E'_{ii}$. $sr \neq 0$ kann dann nur gelten für $r = e_ir'e_iE_{qk}E'_{ii}$ (bzw. Summen über k). Da aber dann gilt $E_{pp}T_iE_{qq} \neq 0 \neq E_{qq}T_iE_{kk}$, folgt $E_{pp}T_iE_{kk} \neq 0$, d. h., $e_iRe_iE_{pk}E'_{ii} \subset R'$ und damit ist sr aus R'.

Da $E_{qq}T_iE_{qq} \neq 0$ ist für alle i, q, folgt, daß $e_iRe_iE_{qq}E'_{ii} \subset R'$ ist. Somit ist R' HDE- Unterring von S, ferner gilt:

$f'_iR'f'_i$ ist zu R'_i isomorph:

Denn nach Konstruktion gilt $e_jE_{kk}E'_{jj}f'_iR'f'_ie_tE_{ll}E'_{tt} \neq 0$ genau dann, wenn $e_jE_{kk}E'_{jj}R'_ie_tE_{ll}E'_{tt} \neq 0$ ist (wobei die von Null verschiedenen Idempotente aus R'_i und $f'_iR'f'_i$ für $j \neq i$ als E_{kk} nur E_{11} bzw. für $t \neq i$ als E_{ll} nur E_{11} haben.). Damit läßt sich $h_i : f'_iR'f'_i \longrightarrow R'_i$ definieren durch $h_i(e_kse_jE_{pq}E'_{kj}) := e_kse_jE_{pq}E'_{kj}$. Trivialerweise ist h_i Ringisomorphismus. Somit existiert $g_i \circ h_i : f'_iR'f'_i \longrightarrow f_iRf_i \subset R$ und es gilt für alle i: $g_i \circ h_i(e_kse_jE_{11}E'_{kj}) = e_kse_jE_{11}E'_{kj}$ für alle e_kse_j aus fRf.

Sei jetzt $G : R' \longrightarrow R$ definiert durch $G(e_kse_iE_{pq}E'_{ki}) := g_i \circ h_i(e_kse_iE_{pq}E'_{ki})$.

Da $e_k s e_i E_{pq} E'_{ki} \neq 0$ in R' folgt, daß $e_k s e_i E_{pq} E'_{ki}$ in $f'_i R' f'_i$ liegt, ist G für alle Elemente aus R' definiert. G ist auch surjektiv: Denn $0 \neq e_i s e_j \in R$ folgt nach (4.34), daß $e_i s e_j$ in $f_k R f_k$ für k geeignet liegt. Liegt $e_i s e_j$ sogar in fRf, so ist $e_i s e_j = G(e_i s e_j E_{11} E'_{ij})$. Liegt $e_i s e_j$ nicht in fRf, dann existiert ein $e_t r e_k E_{pq} E'_{tk} \in R'_k$: $e_i s e_j = g_k(e_t r e_k E_{pq} E'_{tk}) =$ $= g_k(h_k(e_t r e_k E_{pq} E'_{tk})) = G(e_t r e_k E_{pq} E'_{tk})$.

G ist nach Konstruktion Gruppenhomomorphismus, denn g'_l: $f'_l R'(f'_l - f' + e'_l) \longrightarrow f_l R(f_l - f + e_l)$ mit $g'_l(e_i r e_l E_{pq} E'_{il}) :=$ $:= g_l(h_l(e_i r e_l E_{pq} E'_{il}))$ ist für alle $1 \leq l \leq m$ Gruppenhomomorphismus. Da als abelsche Gruppe R direkte Summe über die $f_l R(f_l - f + e_l)$, R' direkte Summe über die $f'_l R'(f'_l - f' + e'_l)$ ist, ferner $G(e_i r e_l E_{pq} E'_{il}) = g'_l(e_i r e_l E_{pq} E'_{il})$ ist, ist also G direkte Summe über die g'_l und damit Gruppenhomomorphismus.

Man kann sich also bei der Multiplikation auf den Fall $e_k s e_i E_{pq} E'_{ki}$, $e_i r e_j E_{qt} E'_{ij} \in R'$ beschränken und beide als von Null verschieden betrachten, da ja $G(0) = 0$ direkt aus der Definition von G folgt:

i) Gilt $p = q = t = 1$, so ist $G(e_k s e_i E_{pq} E'_{ki} \cdot e_i r e_j E_{qt} E'_{ij}) =$
$= G(e_k s e_i e_i r e_j E_{11} E'_{kj}) = g_j h_j(e_k s e_i e_i r e_j E_{11} E'_{kj}) = e_k s e_i e_i r e_j =$
$= g_i h_i(e_k s e_i E_{11} E'_{ki}) g_j h_j(e_i r e_j E_{11} E'_{ij}) =$
$= G(e_k s e_i E_{pq} E'_{ki}) G(e_i s e_j E_{qt} E'_{ij})$.

ii) Gilt $1 = p = q < t$, so ist $G(e_k s e_i E_{pq} E'_{ki} \cdot e_i r e_j E_{qt} E'_{ij}) =$
$= G(e_k s e_i e_i r e_j E_{1t} E'_{kj}) = g_j h_j(e_k s e_i e_i r e_j E_{1t} E'_{kj}) =$
$= g_j h_j(e_k s e_i E_{11} E'_{ki}\ e_i r e_j E_{1t} E'_{ij}) = g_j h_j(e_k s e_i E_{11} E'_{ki}) \cdot$
$\cdot g_j h_j(e_i r e_j E_{1t} E'_{ij}) = e_k s e_i\ g_j h_j(e_i r e_j E_{1t} E'_{ij}) =$
$= g_i h_i(e_k s e_i E_{11} E'_{ki}) \cdot g_j h_j(e_i r e_j E_{1t} E'_{ij}) = G(e_k s e_i E_{pq} E'_{ki}) \cdot$
$\cdot G(e_i r e_j E_{qt} E'_{ij})$.

Es verbleibt noch:

iii) $q,t > 1$ (da nach Konstruktion von R' $e_i r e_j E_{qt} E'_{ij} = 0$ ist für $q > 1 = t$): Nach Konstruktion gilt dann $i = j$, da für $i \neq j$ $e_i r e_j E_{qt} E'_{ij} = 0$ ist. Somit hat man:

$G(e_k s e_i E_{pq} E'_{ki}\ e_i r e_j E_{qt} E'_{ij}) = G(e_k s e_i e_i r e_i E_{pt} E'_{ki}) =$

$= g_i h_i (e_k s e_i e_i r e_i E_{pt} E'_{ki}) = g_i h_i (e_k s e_i E_{pq} E'_{ki} \cdot e_i r e_i E_{qt} E'_{ii}) =$

$= g_i h_i (e_k s e_i E_{pq} E'_{ki}) \cdot g_i h_i (e_i r e_i E_{qt} E'_{ii}) =$

$= G(e_k s e_i E_{pq} E'_{ki}) \cdot G(e_i r e_j E_{qt} E'_{ij})$.

Damit ist G surjektiver Ringhomomorphismus, also R isomorph zu einem Faktorring von R' und nach Korollar 3 zu Satz 1.3 von guter Selbstdualität.

q.e.d.

K a p i t e l 5

G r u p p e n r i n g e

Ist R ein Ring, G eine endliche Gruppe, so versteht man unter dem Gruppenring RG bekanntlich jenen Ring, dessen Elemente Summen der Form $\sum_{g\in G} r_g g$ sind, wobei die r_g aus R nur endlich oft verschieden von Null sind. Die additive Struktur entspricht der von $R^{(G)}$. Für die Multiplikation gilt:

$$\left(\sum_{h\in G} r_h h\right) \cdot \left(\sum_{g\in G} s_g g\right) = \sum_{g,h\in G} r_h s_g hg$$

Für endliche Gruppen kann man zeigen:

Satz 5.1:

Ist G endliche Gruppe, R zu S vermöge ${}_R U_S$ dualer Ring, so ist der Gruppenring RG zum Gruppenring SG dual.

Beweis:

Zur Vereinfachung des Beweises wird die Inklusion $G \longrightarrow RG$, $g \longmapsto 1_R g$ ausgenutzt und statt $1_R g$ oder $1g$ einfach g geschrieben.

Bekanntlich ist $RG \otimes_R U$ R- und auch RG- Linksmodul, da RG sowohl RG- R- als auch R- R- Bimodul ist (s. z. B. [1, 19.5. Proposition.]). Da ${}_R U$ endlich erzeugt ist nach Satz 0.3, da ferner G endliche Gruppe ist, folgt, daß auch ${}_R RG \otimes U$ endlich erzeugt ist. Damit muß aber auch ${}_{RG} RG \otimes U$ endlich erzeugt sein. Außerdem ist $RG \otimes U$ injektiver Kogenerator für RG:

Nach Lemma 0.6 ist ${}_{RG}\mathrm{Hom}_R ({}_R RG , {}_R U)$ injektiver Kogenerator für RG. Sei $F: {}_{RG}\mathrm{Hom}_R (RG,U) \longrightarrow {}_{RG} RG \otimes_R U$ definiert durch $(f)F := \sum_{g\in G} g^{-1} \otimes (g)f$. Da G endliche Gruppe, $(g)f$ aus U ist, ist F Abbildung. F ist trivialerweise additiv. F ist auch RG- linear: Sei $r = \sum_{g\in G} r_g g$ aus RG, f aus $\mathrm{Hom}_R (RG,U)$:

$$(rf)F = \sum_{h\in G} h^{-1} \otimes (h)rf = \sum_{h\in G} h^{-1} \otimes \left(h \left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\right) f =$$

$$= \sum_{h\in G} h^{-1} \otimes \left(\sum_{g\in G} r_g hg\right) f = \sum_{h,g\in G} r_g h^{-1} \otimes (hg)f =$$

$= \sum_{h,g\in G} r_g(g\cdot g^{-1})h^{-1} \otimes (hg)f = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} r_g g\,(hg)^{-1} \otimes (hg)f =$

$= \sum_{g\in G}\sum_{g'\in G} (r_g g)g'^{-1} \otimes (g')f = \Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big)\Big(\sum_{g'\in G} g'^{-1} \otimes (g')f\Big) =$

$= r(f)F$. Somit ist F RG- linear.

Als nächstes sei F surjektiv gezeigt: Da RG freier R- Rechtsmodul ist, folgt nach [10, 11.11 Corollary], daß sich jedes Element aus RG $\otimes$ U in der Form $\sum_{g\in G} g \otimes u_g$ schreiben läßt. Sei also $\sum_{h\in G} h \otimes u_h$ aus RG $\otimes$ U vorgegeben, so definiert $f:RG \longrightarrow U$, $\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big)f := \sum_{g\in G} r_g u_{(g^{-1})}$ eine R- lineare Abbildung. Es gilt: $(f)F = \sum_{g\in G} g^{-1} \otimes (g)f = \sum_{g\in G} g^{-1} \otimes u_{(g^{-1})} = \sum_{g\ G} g \otimes u_g$. Also ist F surjektiv.

Ist $(f)F = 0$, so gilt $\sum_{g\in G} g^{-1} \otimes (g)f = 0$. Da RG freier R-Rechtsmodul ist, folgt nach [10, 11.11 Corollary], daß in der Darstellung $\sum_{g\in G} g \otimes u_g$ die u_g eindeutig festgelegt sind. Somit folgt, $(g)f = 0$ für alle g aus G, was $\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big) f = \sum_{g\in G} r_g(g)f = \sum_{g\in G} r_g \cdot 0 = 0$ nach sich zieht. Damit ist $f = 0$, also ist F injektiv.

Insgesamt erhält man, daß ${}_{RG}RG \otimes U$ zu ${}_{RG}Hom_R\,(\,RG,\,U\,)$ isomorph ist und damit ist ${}_{RG}RG \otimes U$ injektiver Kogenerator in ${}_{RG}\underline{Mod}$. Zu zeigen verbleibt jetzt:

$End_{RG}\,(\,RG \otimes_R U\,) \cong SG$.

Da R zu S vermöge ${}_RU_S$ dual ist, gilt $End_R(U) \cong S$. Es reicht also zu zeigen, daß $End_{RG}\,(\,RG \otimes_R U\,)$ zu $End_R(U)G$ isomorph ist.

Sei e das Einselement in G, f aus $End_{RG}\,(\,RG \otimes U\,)$, u aus U, so gilt $(e\otimes u)f = \sum_{g\in G} g \otimes (u)f_g$. Da $(u)f_g$ eindeutig festgelegt ist durch $(e\otimes u)f$, folgt, daß f_g Abbildung von U in U ist. Da f RG- linear ist, sind die f_g R- linear:

$\sum_{g\in G} g \otimes r(u)f_g = \sum_{g\in G} gr \otimes (u)f_g = r\,\Big(\sum_{g\in G} g \otimes (u)f_g\Big) =$

$= r\cdot(e\otimes u)f = (re\otimes u)f = (e\otimes ru)f = \sum_{g\in G} g \otimes (ru)f_g$.

Daß $r(u)f_g = (ru)f_g$ für alle g aus G gilt, erhält man wieder dadurch, daß $(ru)f_g$ eindeutig festgelegt ist durch $(e\otimes u)f$.

Somit ist f_g aus $End_R(U)$ für alle g aus G.

Für $g\otimes u$ gilt: $(g\otimes u)f = g\cdot(e\otimes u)f = g\cdot(\sum_{h\in G} h \otimes (u)f_h) = \sum_{h\in G} gh \otimes (u)f_h$, d.h.: $(\sum_{g\in G} g \otimes u_g)f = \sum_{h,g\in G} gh \otimes (u_g)f_h$.

Mit den f_g kann man jetzt eine Ringisomorphie $F: End_{RG}(RG \otimes U) \longrightarrow End_R(U)G$ definieren wie folgt:

$F(f) := \sum_{g\in G} f_g g$

F ist trivialerweise Abbildung und es gilt $F(f'+f) = F(f') + F(f)$, denn es gilt ja $(e\otimes u)(f'+f) = (e\otimes u)f' + (e\otimes u)f$.

F ist auch multiplikativ: Für $f'\circ f$ gilt:

$(e\otimes u)(f'\circ f) = ((e\otimes u)f')f = (\sum_{g\in G} g \otimes (u)f'_g)f =$

$= \sum_{g\in G} g\cdot(e\otimes(u)f'_g)f = \sum_{g\in G} g\,(\sum_{h\in G} h \otimes ((u)f'_g)f_h) =$

$= \sum_{g,h\in G} gh \otimes (u)f'_g f_h = \sum_{g'\in G}\sum_{gh=g'} g' \otimes (u)\, f'_g f_h$.

Dies ist aber auch gleich $\sum_{g'\in G} g' \otimes (u)(f'\circ f)_{g'}$. Also gilt:

$(f'\circ f)_{g'} = \sum_{gh=g'} f'_g f_h$. Ferner gilt: $F(f'\circ f) = \sum_{g'\in G}(f'\circ f)_{g'}g' =$

$= \sum_{g'\in G}\sum_{gh=g'} f'_g f_h\cdot g' = \sum_{g,h\in G} f'_g f_h\cdot gh = (\sum_{g\in G} f'_g g)(\sum_{h\in G} f_h h) =$

$= F(f')\,F(f)$. Damit ist F multiplikativ.

Ist $F(f) = 0$, so ist $f_h = 0$ für alle h aus G. Damit ist aber auch $(\sum_{g\in G} g \otimes u_g)f = \sum_{g,h\in G} gh \otimes (u_g)f_h = \sum_{g,h\in G} gh \otimes 0 = 0$.

Also ist F injektiv.

Ist $\sum_{g\in G} f_g g$ aus $End_R(U)G$ vorgegeben, so ist $f: \sum_{h\in G} h \otimes u_h \longmapsto \sum_{g,h\in G} hg \otimes (u_h)f_g$ RG- linearer Endomorphismus von $RG \otimes U$:

Sei $\sum_{g'\in G} r_{g'} g'$ aus RG, so gilt:

$((\sum_{g'\in G} r_{g'} g')(\sum_{h\in G} h \otimes u_h))f = (\sum_{g',h\in G} r_{g'} g'h \otimes u_h)f =$

$= (\sum_{g',h\in G} g'h \otimes r_{g'} u_h)f = (\sum_{h'\in G} h' \otimes (\sum_{g'h=h'} r_{g'} u_h))f =$

$$= \sum_{g,h' \in G} h'g \otimes \Big(\sum_{g'h=h'} r_{g'} u_h \Big) f_g = \sum_{g,h,g' \in G} g'hg \otimes r_{g'}(u_h) f_g =$$

$$= \sum_{g' \in G} \sum_{g,h \in G} g'hg \cdot r_{g'} \otimes (u_h) f_g = \Big(\sum_{g' \in G} r_{g'} g' \Big)$$

$$\Big(\sum_{g,h \in G} hg \otimes (u_h) f_g \Big) = \Big(\sum_{g' \in G} r_{g'} g' \Big) \Big(\sum_{h \in G} h \otimes u_h \Big) f.$$

f ist trivialerweise Gruppenhomomorphismus der RG ⊗ U zu Grunde liegenden abelschen Gruppe. Somit ist f aus $\mathrm{End}_{RG}(RG \otimes_R U)$. Ferner gilt $F(f) = \sum_{g \in G} g \otimes f_g$. Damit ist F auch surjektiv.

Insgesamt ist also F Ringisomorphismus, d. h., RG ist zu SG dual.

q.e.d.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar:

Korollar:

Ist R Morita- selbstdualer Ring, G endliche Gruppe, so ist der Gruppenring RG auch wieder Moritaselbstdual.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s :

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller: Rings and Categories of Modules, Springer Verlag New York 1973

[2] M. Auslander, M. I. Platzeck, I. Reiten: Coxeter functors without diagrams, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 250 (1979) 1 - 46

[3] G. Azumaya: A duality theory for injektiv modules, Amer. J. Math. 81 (1959) 249 - 260

[4] H. Beckmann: Ringe mit Selbstdualität, Diplomarbeit Düsseldorf 1981

[5] V. Camillo: Distributive modules, J. Algebra 36 (1975) 16 - 25

[6] P. M. Cohn: On a class of binominal extensions, Illinois J. of Math. 10 (1966) 418 - 424

[7] P. M. Cohn: Free rings and their relations, Academic Press London- New York 1971

[8] V. Dlab, C. M. Ringel: Representations of graphs and algebras, Mem. Amer. Math. Soc. No. 173 (1976)

[9] D. Eisenbud, P. Griffith: Serial rings, J. Algebra 17 (1971) 389 - 400

[10] C. Faith: Algebra: Rings, Modules and Categories I, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1973

[11] C. Faith: Algebra II, Ring Theory, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1976

[12] K. R. Fuller: Generalized uniserial rings and their Kupisch series, Math. Z. 106 (1968) 248 - 260

[13] K. R. Fuller: On indecomposable injectives over artinian rings, Pacific J. Math. 29 (1969) 115 - 135

[14] K. R. Fuller: Rings of left invariant module type, Comm. Algebra 6 (1978) 153 - 167

[15] K. R. Fuller, J. K. Haack: Rings with quivers that are trees, Pacific J. of Math. 76 (1978) 371 - 379

[16] J. K. Haack: Self- duality and serial rings, J. Algebra 59 (1979) 345 - 363

[17] J. K. Haack: Incidence rings with self- duality, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 78 (1980) 165 - 169

[18] J. K. Haack: Serial rings and subdirect products, J. Pure Appl. Algebra 30 (1983) 157 - 165

[19] G. Ivanov: Left generalized uniserial rings, J. Algebra 31 (1974) 166 - 181

[20] J. P. Jans, T. Nakayama: On the dimension of modules and algbras, VIII. Nagoya Math. J. 11 (1956) 67 - 76

[21] F. Kasch: Moduln und Ringe, B. G. Teubner Stuttgart 1977

[22] H. Kupisch: Beiträge zur Theorie nicht halbeinfacher Ringe mit Minimalbedingungen, J. Reine Angew. Math. 201 (1959) 100 - 112

[23] K. Meyberg: Algebra Teil 2, Carl Hanser Verlag München Wien 1976

[24] B. Mitchell: Theory of categories, Academic Press New York London 1965

[25] K. Morita: On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals, Sci. Report,Tokyo Bunrika Daigaku 4 (1951) 177 - 194

[26] K. Morita: Duality for modules and its application to the theory of rings with minimum conditions, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A 6 (1958) 83 - 142

[27] B. J. Müller: On Morita duality, Canad. J. Math. 6 (1969) 1338 - 1347

[28] B. J. Müller: Linear compactness and Morita duality, J. Algebra 16 (1970) 60 - 66

[29] B. J. Müller: On semiperfekt rings, Ill. J. Math. 14 (1970) 464 - 467

[30] B. J. Müller: The structure of quasi Frobenius rings, Canad. J. Math. Vol. XXVI (1974) 1141 - 1151

[31] I. Murase: On the structure of generalized uniserial rings I, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo 13 (1963) 1 - 22

[32] I. Murase: On the structure of generalized uniserial rings II, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo 13 (1963) 131 - 158

[33] I. Murase: On the sructure of generalized uniserial rings III, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo 14 (1964) 11 - 25

[34] T. Nakayama: Note on uniserial and generalized uniserial rings, Proc. Imp. Acad. Japan 16 (1940) 285 - 289

[35] T. Nakayama: On Frobeniusean algebras II, Ann. of Math. 42 (1941) 1 - 21

[36] B. Osofsky: A generalization of quasi Frobenius rings, J. Algebra 4 (1966) 373 - 387

[37] B. Roux: Modules injectifs indecómposables sur les anneaux Artiniens et dualité de Morita, Séminaire Dubreil (algébre) 26 No. 10 (1973)

[38] H. Schubert: Kategorien I, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1970

[39] H. Schubert: Kategorien II, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1970

[40] P. Vamos: Rings with duality, Proc. London Math. Soc. 35 (1977) 275 - 289

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist, Ringe zu finden, für die eine kontravariante Äquivalenz zwischen der Kategorie der endlich erzeugten Linksmoduln und der Kategorie der endlich erzeugten Rechtsmoduln vorhanden ist. Um zu diesem Ziel zu gelangen, werden drei Beweismethoden angewendet.

Eine Methode einen dualen Ring anzugeben ist folgende: Zu einem linksartinschen Ring R und einem rechtsartinschen Ring S gibt man einen R- S- Bimodul ${}_RU_S$ an, so daß U sowohl als R- Links- als auch als S- Rechtsmodul injektiver Kogenerator ist. Ferner muß man zeigen, daß von $\mathrm{Hom}_S(-,{}_RU_S)$ und $\mathrm{Hom}_R(-,{}_RU_S)$ einfache Moduln in ebensolche überführt werden.

Mit dieser Methode wird in Kapitel 2 die Selbstdualität für bestimmte verallgemeinerte Matrizenringe nachgewiesen. Es handelt sich dabei um Matrizenringe R, für die gilt, daß es einen lokalen QF- Ring D gibt, so daß jedes Hauptdiagonalelement eines jeden Elementes aus R aus D stammt. An der (i,j)-ten Stelle sollen Elemente aus einem D- D- Bimodul R_{ij} stehen, für diesen Bimodul R_{ij} wird verlangt, daß er direkte Summe von Bimoduln R_{ij}^k ist. Für die R_{ij}^k gelte, daß sie beidseits zu D isomorphe Moduln sind.

Die gleiche Beweismethode wird auch in Kapitel 1 verwendet. Dort wird ein Ring R, der vermöge eines Bimoduls ${}_RU_{R'}$ zu einem Ring R' dual ist, betrachtet. Für die Ringe R und R' gelte, daß es eine vollständige Menge paarweise orthogonaler Idempotente $f_1,\ldots, f_k$ von R und eine vollständige Menge paarweise orthogonaler Idempotente $f_1',\ldots, f_k'$ von R' gibt, so daß für alle i die injektive Hülle von $Rf_i/\mathrm{Rad}(Rf_i)$ zu Uf_i' isomorph ist. Mit Hilfe der Annulatoren $\mathrm{ann}_{f_j'R'f_i'}(\,-\,)$ und und $\mathrm{ann}_{f_iUf_j'}(\,-\,)$ erhält man dann Aussagen über die Gestalt

der dualen Ringe von Faktorringen und von Unterringen von R. Bei den Unterringen wird noch verlangt, daß $f_i R f_i$ für alle i im Unterring liegt.

Für einen Unterring S, für den gilt, daß für alle primitiven Idempotente e aus R eRe in S enthalten ist, wird der Begriff HDE- Unterring eingeführt. Im ersten Kapitel wird noch gezeigt, daß jeder HDE- Unterring, jeder Faktorring und jeder Morita- äquivalente Ring eines Ringes mit guter Dualität wieder gute Dualität hat. (Ein Ring R, der vermöge eines Bimoduls ${}_R U_R$ selbstdual ist, hat eine gute Dualität, wenn für alle zweiseitigen Ideale I des Ringes gilt, daß $r_R r_U(I) = I$ ist. Dabei werden mit $r_R(-)$ bzw. $r_U(-)$ Rechtsannulatoren bezeichnet.)

Damit hat man eine zweite Möglichkeit die Selbstdualität, speziell sogar die gute Dualität eines Ringes R zu beweisen: Man muß von R zeigen, daß es sich um einen Faktorring oder Unterring eines Ringes mit guter Dualität handelt.

Dies Ergebnis wird in Kapitel 3 benutzt, indem man zu einem einreihige Ring R einen einreihigen QF- Ring konstruiert, so daß R Faktorring eines HDE- Unterringes des einreihigen QF- Ringes ist. Von einreihigen QF- Ringen hat J. K. Haack ([16]) die gute Dualität nachgewiesen.

Bei der Konstruktion des einreihigen QF- Ringes werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem, ob für alle Idempotente $e_1, \ldots, e_n$ einer Kupischreihe von R gilt, daß die Kompositionslängen von $e_i R e_i$ und $e_i R e_{i+1}$ als $e_i R e_i$- Moduln für $1 \leq i < n$ und die Kompositionslängen von $e_n R e_n$ und $e_n R e_1$ als $e_n R e_n$- Moduln gleich sind oder nicht.

In Kapitel 4 wird zuerst gezeigt, daß jeder linkseinreihige Ring R, für den gilt, daß eR für alle primitiven Idempotente e aus R distributiv ist und für den es einen einfachen projektiven Linksmodul gibt, Faktorring eines tic tac toe- Matrizenringes über einem Schiefkörper ist. Damit ist dieser Ring Faktorring eines HDE- Unterringes eines Matrizenringes über einem Schiefkörper. Also ist R von guter Dualität.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses wird dann weiterhin gezeigt, daß jeder linkseinreihige Ring, für den gilt, daß eR distributiv ist für alle primitiven Idempotente e aus R und für den es keinen einfachen projektiven Linksmodul gibt, Faktorring eines HDE- Unterringes eines einreihigen Ringes ist. Damit ist dann für alle linkseinreihigen Ringe, für die gilt, daß eR für alle primitiven Idempotente e in R distributiv ist, gezeigt, daß sie Ringe von guter Dualität sind.

Wesentlich für die Beweise des vierten Kapitels ist die Konstruktion eines tic tac toe- Ringes zu einem Ring, dessen Köcher Bäume sind, wie sie von K. R. Fuller und J. K. Haack ([15]) durchgeführt worden ist.

Die dritte benutzte Beweismethode, die in der Literatur über selbstduale Ringe häufig verwendet wird, ist folgende: Man sucht zu einem linksartinschen Ring R einen endlich erzeugten injektiven Kogenerator ${}_RU$. $\mathrm{End}_R(U)$ ist dann ein zu R dualer Ring ([3]). Mit dieser Methode wird in Kapitel 5 gezeigt, daß für einen Ring R, der zu einem Ring S dual ist, der Gruppenring RG zum Gruppenring SG dual ist, wenn G eine endliche Gruppe ist.

Bedanken möchte ich mich bei meinem Doktorvater, Herrn Professor Dr. O. Kerner für dieses interessante Thema, viel konstruktive Kritik und die ungeheure Geduld, die er immer wieder bei der Diskussion dieser Arbeit aufbrauchte. Seine Betreuung ging weit über das von mir erwartete Maß hinaus.

L e b e n s l a u f

26. Juli 1956	geboren als einziges Kind der Hausfrau Margarete Beckmann, geb. Plewka, und des Angestellten Anton Beckmann
April 1963	eingeschult in die städtische Volksschule an der Heyestraße
Ende 1966	Beginn des Besuchs des Gymnasiums am Poth
Juni 1975	Abitur an diesem Gymnasium
Oktober 1975	Beginn des Studiums der Mathematik und Physik an der Universität Düsseldorf
April 1977	Beginn des Medizinstudiums an dieser Universität
Oktober 1977	Diplomvorprüfung in Mathematik
März 1979	Ärztliche Vorprüfung
Oktober 1981	Diplomprüfung in Mathematik
März 1982	Erster Abschnitt der Ärztlichen Prüfung